9 Les polynômes… la suite

9.1 Définition d'un polynôme complexe

La connaissance des nombres complexes va nous permettre d'approfondir l'étude des polynômes. Nous allons donc considérer l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, soit l'ensemble $\mathbb{C}[z]$. Nous allons plus particulièrement approfondir l'étude des polynômes complexes à coefficients réels, à coefficients rationnels et à coefficients entiers.

Définition 1 (Polynôme complexe)**.** *Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Si $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors toute expression pouvant s'exprimer sous la forme*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ \ldots\ + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

est appelée polynôme à une indéterminée sur le corps des nombres complexes. L'ensemble des polynômes complexes est noté $\mathbb{C}[z]$. Si l'indéterminée est notée x, alors l'ensemble des polynômes complexes est noté $\mathbb{C}[x]$.

Précisons d'abord que les définitions et les théorèmes qui ont déjà été présentés dans le contexte des polynômes réels $\mathbb{R}[x]$ demeurent valides dans le contexte des polynômes complexes $\mathbb{C}[z]$.

Tout comme dans $\mathbb{R}[x]$, la notation $\mathrm{P}(z)$ correspond, par abus de langage, à $\mathrm{f}(z)$ où f est la fonction polynomiale associée au polynôme P

$$\begin{aligned} \mathrm{f} : \ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \mathrm{f}(z) = \mathrm{P} \end{aligned}$$

Voici un exemple d'un énoncé, valide sans $\mathbb{R}[x]$, qui demeure valide également dans l'ensemble $\mathbb{C}[z]$:

$$\mathrm{P}(c) = 0 \Longleftrightarrow (z - c) \text{ est un facteur du polynôme P.}$$

Exemple 9.1

Soit $\mathrm{P} = 2z^2 - iz + 1$. Évaluons directement $\mathrm{P}(-1-i)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(-1-i) &= 2(-1-i)^2 - i(-1-i) + 1 \\ &= 2(2i) + i - 1 + 1 \\ &= 5i \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi évaluer $\mathrm{P}(-1-i)$ par substitution synthétique.

$$\begin{array}{r|rr|r}
 & 2 & -i & 1 \\
 & & -2-2i & -1+5i \\
\hline
-1-i & 2 & -2-3i & 5\mathrm{i}
\end{array}$$

On obtient également $\mathrm{P}(-1-i) = 5\,i$. Nous pouvons donc conclure que $z-(-1-i)$ ne divise pas le polynôme P puisque le reste n'est pas nul. L'algorithme de la division nous permet d'écrire

$$2z^2 - iz + 1 = (z+1+i)(2z-2-3\,i) + 5\,i$$

Soit maintenant $\mathrm{P} = i\,z^3 - z^2 + 4\,i\,z + 6$. Avec MAPLE, obtenons le quotient et le reste de la division du polynôme P par $(z-1-i)$.

Activons la procédure `div_syn` en modifiant la validation du type `realcons` par la validation du type `complexcons`. Cela va permettre d'accepter les nombres complexes dans la procédure.

Dans le cas où le lecteur serait dans une nouvelle session MAPLE, associons d'abord le lettre «i» minuscule à l'unité imaginaire. Sinon, inutile d'exécuter la requête ci-dessous.

```
> interface(imaginaryunit=i);
                                    I
```

```
> div_syn:=proc(p::polynom,x0::complexcons)
  local A,a,k,n,Q,x;
  x:=op(1,indets(p));
  if degree(p)=-infinity then
   printf("Le reste de la division de %a par (%a) est %a",p,x-x0,p);
   printf("\nLe polynôme quotient est 0")
  else
   A:=[seq(coeff(p,x,k),k=0..degree(p))];
   n:=nops(A);
   Q[1]:=A[n];
   for k from 1 to n-1 do
    Q[k+1]:=eval(Q[k]*x0+a[n-k-1],a[n-k-1]=A[n-k])
    od;
   printf("Le reste de la division de (%a) par (%a) est %a",p,x-x0,sort(Q[k]));
   printf("\nLe polynôme quotient est (%a)",sort(eval(sum(Q['k']*x^'n-k-1',\
         'k'=1..n-1))))
  fi
  end:
```

```
> P:=i*z^3-z^2+4*i*z+6;
  div_syn(P,1+i);
```

$$P := \mathrm{i}z^3 - z^2 + 4\mathrm{i}z + 6$$

```
Le reste de la division de i*z^3-z^2+4*i*z+6 par (z-1-i) est 0
Le polynôme quotient est (i*z^2+(-2+i)*z-3+3*i)
```

Puisque le reste est nul, $1+i$ est une racine du polynôme $i\,z^3 - z^2 + 4\,i\,z + 6$ et donc que $(z-i-i)$ est un facteur. En divisant, nous obtenons l'égalité

$$i\,z^3 - z^2 + 4\,i\,z + 6 = (z-1-i)\,(i\,z^2 + (-2+i)\,z - 3 + 3\,i)$$

Théorème 1. *Soit* $\mathrm{P} = az+b, (a \neq 0)$ *un polynôme complexe du premier degré. Alors, le polynôme P possède une seule racine complexe* $z = -\frac{b}{a}$.

Bien que la résolution d'une équation polynomiale du premier degré soit évidente, prenons tout de même le temps de montrer les différentes étapes d'un bon développement mathématique.

Exemple 9.2

Déterminons la racine du polynôme $\mathrm{P} = (2-3\,i)z+2-i$ en résolvant l'équation polynomiale $\mathrm{P}(z) = 0$.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \mathrm{P}(z) & = & 0 \\
\iff & (2-3\,i)\,z+2-i & = & 0 \\
\iff & (2-3\,i)\,z & = & -2+i \\
\iff & z & = & \dfrac{-2+i}{2-3\,i} \\
\iff & z & = & \dfrac{-2+i}{2-3\,i}\,\dfrac{2+3\,i}{2+3\,i} \\
\iff & z & = & \dfrac{-7-4\,i}{13} \\
\iff & z & = & \dfrac{-7}{13}-\dfrac{4}{13}\,i
\end{array}$$

La macro-commande `solve` permet de résoudre aisément de telles équations du premier degré. Bien sûr, la macro-commande `solve` n'est pas limitée à la seule résolution des telles équations. Cette macro-commande permet, quand c'est possible, d'obtenir une résolution symbolique.

```
> Éq:=(2-3*i)*z+2-i=0;
  solve(Éq,{z});
```

$$\mathit{Éq} := (2-3\mathrm{i})\,z+2-\mathrm{i} = 0$$

$$\left\{z = -\frac{7}{13}-\frac{4}{13}\,\mathrm{i}\right\}$$

En, fait, toute équation du premier degré en z définit implicitement un polynôme P pour lequel on cherche sa racine.

Exemple 9.3

Résolvons l'équation $3i\,z-5+4\,i = (2-5\,i)z$.

Cette équation définit implicitement un polynôme P tel que $\mathrm{P}(z) = (-2+8i)z-5+4i$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(z) &= 0 \\
\iff (-2+8i)z-5+4i &= 0 \\
\iff (-2+8i)z &= 5-4i \\
\iff z &= \frac{5-4i}{-2+8i} \\
\iff z &= \frac{5-4i}{-2+8i}\,\frac{-2-8i}{-2-8i} \\
\iff z &= \frac{-42-32i}{68} \\
\iff z &= -\frac{21}{34}-\frac{8}{17}i
\end{aligned}
$$

Dans le cas d'un polynôme $ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]$ du deuxième degré, l'*existence* de racines réelles est discutée sur la base du signe du discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Par contre, dans les cas des polynômes complexes du deuxième degré $az^2+bz+c \in \mathbb{C}[z]$, tout tel polynôme possède toujours exactement deux racines complexes.

Théorème 2. *Soit* $\mathrm{P} = az^2+bz+c \in \mathbb{C}[z], (a \neq 0)$ *un polynôme complexe du deuxième degré. Alors, le polynôme P possède deux racines complexes, pas nécessairement distinctes, données par*

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Voici quelques exemples de calculs de racines de polynômes complexes du deuxième degré en utilisant la formule quadratique précédente.

Exemple 9.4

Obtenons les deux racines du polynôme $\mathrm{P} = 2x^2+3ix-1$. Résolvons alors l'équation polynomiale $\mathrm{P}(x) = 0$ en utilisant la formule quadratique.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) = 0 \iff x &= \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2-4(2)(-1)}}{4} \\
\iff x &= \frac{-3i \pm \sqrt{-1}}{4} \\
\iff x &= \frac{-3i \pm i}{4} \\
\iff x &= -i \text{ ou } -\frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

Les deux racines du polynôme P sont $r_1 = -i$ et $r_2 = -\frac{1}{2}i$

L'obtention des deux racines nous permet de factoriser le polynôme $2x^2+3ix-1$. En effet, tout polynôme complexe ax^2+bx+c du deuxième degré peut toujours s'exprimer sous la forme factorisée

$$ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$$

où r_1 et r_2 sont les deux racines du polynôme. Alors, nous avons la factorisation

$$\begin{aligned}2x^2+3ix-1 &= 2(x-(-i))(x-(-\frac{1}{2}i))\\ &= 2(x+i)(x+\frac{1}{2}i)\\ &= (x+i)(2x+i)\end{aligned}$$

Exemple 9.5

Obtenons les deux racines du polynôme $\mathrm{P} = x^2 - \sqrt{3}\,i\,x - i$. Résolvons alors l'équation polynomiale $\mathrm{P}(x) = 0$ en utilisant la formule quadratique.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x)=0 \iff x &= \frac{\sqrt{3}\,i \pm \sqrt{(-\sqrt{3}\,i)^2-4(1)(-i)}}{2}\\ \iff x &= \frac{\sqrt{3}\,i \pm \sqrt{-3+4\,i}}{2}\end{aligned}$$

Obtenons ensuite les deux racines carrées de $\sqrt{-3+4\,i}$ en résolvant

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -3 & (1)\\ 2ab = 4 & (2)\\ a^2+b^2 = 5 & (3)\end{cases}$$

On déduit de ce système que les deux racines carrées de $\sqrt{-3+4\,i}$ sont $1+2\,i$ et $-1-2\,i$

Ainsi, les deux racines du polynôme P sont $r_1 = \dfrac{\sqrt{3}\,i+1+2\,i}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}\,i-1-2\,i}{2}$.

La factorisation de $x^2-\sqrt{3}\,i\,x-i$ est alors

$$x^2-\sqrt{3}\,i\,x-i = \left(x-\frac{1+(\sqrt{3}+2)\,i}{2}\right)\left(x-\frac{-1+(\sqrt{3}-2)\,i}{2}\right)$$

Si les coefficients du polynôme complexe sont des nombres réels, la discussion sur le signe de Δ viendra confirmer la *nature réelle* ou *imaginaire* des racines de ce polynôme.

Si les coefficients d'un polynôme complexe sont réels, nous avons la discussion suivante dans $\mathbb{C}[z]$:

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, b et $c \in \mathbb{R}$, le polynôme $az^2+bz+c \in \mathbb{C}[z]$ possède

i) deux racines réelles distinctes si $b^2-4ac > 0$ données par $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ii) deux racines réelles égales si $b^2-4ac = 0$ données par $z = \dfrac{-b}{2a}$.
On dit dans ce cas que l'on a une racine réelle double.

iii) deux racines imaginaires si $b^2-4ac < 0$ données par $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$

Même lorsque les coefficients du polynôme complexe sont des nombres réels, la factorisation dans $\mathbb{C}[x]$ est aussi possible évidemment.

Exemple 9.6

Factorisons dans $\mathbb{C}[x]$ le polynôme $\mathrm{P} = 5x^2 - 2x + 4$.

Obtenons d'abord les racines du polynôme P.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) = 0 \iff x &= \frac{2 \pm \sqrt{4-80}}{10} \\
\iff \quad &= \frac{2 \pm \sqrt{-76}}{10} \\
\iff \quad &= \frac{2 \pm 2\sqrt{19}\,i}{10} \\
\iff \quad &= \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}\,i \text{ ou } \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}\,i
\end{aligned}$$

Alors, nous avons la factorisation suivante

$$5x^2 - 2x + 4 = 5\left(x - \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}\,i\right)\left(x - \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}\,i\right)$$

Exercices suggérés : 1 à 5 à la page 139

Exercices suggérés : 1 à 4 à la page 140

9.2 Exercices série 6.1

1. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, les équations suivantes.

   a) $(2-i)z = 1-5i$

   b) $2z - i = z + 2 + i$

   c) $(2+2i)z - i = z + 2 + 3i$

   d) $\dfrac{iz}{2+i} = 1 - i$

   e) $(3-i)z + 2 - 5i = -1 - 3i$

   f) $\dfrac{(2-5i)z-3}{-3+4i} = \dfrac{2iz}{3+i}$

   g) $\dfrac{(1+i)z}{2+i} = \dfrac{z(1+i)-2}{i}$

2. Déterminer les racines deuxièmes de
   a) $27\,i$ b) $-27\,i$ c) $7+24\,i$ d) $1+i$ e) $3+5\,i$

3. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, les équations suivantes.

   a) $z^2 = -5i$

   b) $z^2 = 5 + 13\,i$

   c) $z^2 = 2 + 3\,i$

   d) $z^2(2-5\,i) = 50 + 49\,i$

   e) $\dfrac{z}{7-i} = \dfrac{-1+i}{z}$

4. Résoudre, pour $x \in \mathbb{C}$, les équations suivantes.

   a) $2ix = \dfrac{(1-i)x+2}{3-i}$

   b) $4x^2 + 12x = -9$

   c) $25x^2 + 9 = -20x$

   d) $\sqrt{27}x^2 + 5x - \sqrt{48} = 0$

   e) $x^2 = 8x - 41$

   f) $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$

   g) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 24x + 24 = 0$

   h) $x^6 + 2x^4 - 3x^2 = 0$

   i) $x^2 - 12 + 5i = 0$

   j) $x^5 - 5x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x - 6 = 0$

5. Factoriser dans $\mathbb{C}[x]$ les polynômes suivants.

   a) $-2x^2 - 8$

   b) $3x^2 - 12x + 21$

   c) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

   d) $ix^2 + 4i - 2\sqrt{5}$

9.3 Technologie série 6.1

Pour rendre plus facile la saisie des nombres nombres complexes, initialiser comme ci-dessous la variable d'environnement `imaginaryunit` afin de modifier le symbole par défaut I majuscule de l'unité imaginaire.

```
interface(imaginaryunit=i);
```

1. Refaire, avec MAPLE, le premier numéro de la série 6.1 à la page 139 en respectant les étapes suivantes pour chaque équation.
   i) Dans un premier bloc, donner un nom à l'équation à résoudre.
   ii) Dans un deuxième bloc, donner un nom à la racine explicite de l'équation à résoudre. Utiliser la macro-commande `solve`.
   iii) Dans un dernier bloc, vérifier la racine obtenue en utilisant la macro-commande `eval`.

   Voici, en exemple, la résolution de la première équation.
   ```
   > Éq:=(2-i)*z=1-5*i;
   > Racine:=solve(Éq,z);
   > eval(Éq,z=Racine);
   ```
2. Refaire, avec MAPLE, le deuxième numéro de la série 6.1 à la page 139 en respectant les étapes suivantes pour chaque nombre.
   i) Dans un premier bloc, résoudre avec la macro-commande `solve`, l'équation $z^2 = nombre$ où *nombre* est celui sont on veut trouver les deux racines deuxièmes.
   ii) Dans un deuxième bloc, vérifier la première racine obtenue en utilisant la macro-commande `eval`. Utiliser, si nécessaire, la macro-commande radnormal, pour réduire le résultat donné par MAPLE pour montrer clairement qu'il s'agit bien d'une racine deuxième cherchée.
   iii) Dans un dernier bloc, procéder de la même façon pour l'autre racine.

   Voici, en exemple, la manière de procéder avec le premier nombre $27i$.
   ```
   > Racines:=solve(z^2=27*i,z);
   > eval(z^2,z=Racines[1]);
   > radnormal(%);  # Voilà pour la première racine
   > eval(z^2,z=Racines[2]);
   > radnormal(%);  # Voilà pour la seconde racine
   ```
3. Refaire, avec MAPLE, le troisième et le quatrième numéro de la série 6.1 à la page 139 en respectant les mêmes étapes que celles du premier numéro.
   i) Dans un premier bloc, donner un nom à l'équation à résoudre.
   ii) Dans un deuxième bloc, donner un nom aux racines explicites de l'équation polynomiale à résoudre. Utiliser la macro-commande `solve`.
   iii) Dans un dernier bloc, vérifier chaque racine obtenue en utilisant la macro-commande `eval`. S'il y a lieu, simplifier vos évaluations.
4. Refaire, avec MAPLE, le cinquième numéro de la série 6.1 à la page 139 **sans utiliser** la macro-commande `factor`. Respecter les étapes suivantes, chaque étape devant être réaliser dans un bloc de requêtes.
   i) Assigner à la variable « Polynôme » le polynôme à factoriser.
   ii) Obtenir d'abord les racines exactes du polynôme avec la requête `r:=solve(Polynôme,x);`.
   iii) Poser l'égalité `Polynôme=-2*(x-r[1])*(x-r[2]);`
   iv) Vérifier cette égalité en donnant la forme développée du membre de droite avec la requête ``` ``=expand(rhs(%)); ```

   Voici, en exemple, la manière de procéder avec le polynôme $-2x^2+5x-4$.
   ```
   > Polynôme:=-2*x^2+5*x-4;
   > r:=solve(Polynôme=0,x);
   > Polynôme=-2*(x-r[1])*(x-r[2]);
   > ``=expand(rhs(%));
   ```

   Remarque : Adapter ce développement au nombre de racines de la question iii).

9.4 Historique de la résolution de l'équation du troisième degré et du quatrième degré

Niccolò Fontana, dit Tartaglia (1499-1557), est né à Brescia. Son surnom provient de "tartagliare" qui signifie "bégayer" en italien. En effet, Tartaglia avait un défaut de parole, séquelle d'une très grave blessure. Lorsque les Français saccagèrent la ville de Brescia en 1512, Niccolò et son père se réfugièrent dans une cathédrale. Cependant, les soldats de Louis XIV les découvrirent ; ils tuèrent le père de Niccolò, fracturèrent le crâne de celui-ci et lui ouvrirent la mâchoire d'un coup de sabre. Toutefois, sa mère le sauva de la mort.

De famille modeste, Niccolò ne peut aller à l'école mais sa mère économise et parvient à lui payer l'école pendant 15 jours. Il vole alors des livres et continue à apprendre en autodidacte. Adulte, il gagna sa vie en enseignant les mathématiques dans toute l'Italie et en participant à des concours mathématiques. Grâce à lui, les idées de grands mécaniciens du XIIIe siècle furent réétudiées, de même que celles d'Archimède.

L'histoire de la découverte de la résolution algébrique de l'équation du troisième degré met aux prises deux grands mathématiciens rivaux italiens, Cardan et Tartaglia, dans une controverse animée et sordide qui souleva des difficultés d'interprétation et dont le dénouement est assez inattendu.

Sciplone del Ferro, professeur de mathématiques à Bologne, semble être le premier à résoudre l'équation cubique $x^3 = px + q$ et $x^3 + q = px$. (on ne travaillait autrefois qu'avec des nombres positifs)

Del Ferro ne publie pas ses résultats, mais les révéla avant sa mort à Antonio Maria Fior, son élève peu talentueux.

Tartaglia se consacre alors à la recherche d'une méthode de résolution d'équation et il arriva bientôt à résoudre des équations cubiques.

En 1535, Fior, n'étant plus le seul à savoir résoudre ces équations, lança à Tartaglia un défi public sous forme d'un concours portant sur la résolution de trente équations.

Fior proposa alors à Tartaglia trente équations du type $x^3 + px = q$.

Juste avant la date limite, Tartaglia trouva comment résoudre ce type d'équation et résolu les trente proposées.

Par contre, de son côté, Fior n'en avait résolu aucune car les équations proposées par Tartaglia étaient du type $x^3 + px^2 = q$ alors que Fior ne savait résoudre que $x^3 + px = q$.

Tartaglia gagna alors le défi ; cette victoire ne fut d'ailleurs que pour l'honneur, puisque Tartaglia renonça au prix : trente banquets successifs !

Girolano Cardano (1501-1576) se passionne lui pour les équations du troisième et quatrième degré à partir de 1539. Il fait venir Tartaglia chez lui ; il lui promet de lui présenter un mécène pour résoudre ses problèmes d'argent, en échange il demande à Tartaglia de lui révéler sa méthode en lui promettant de ne jamais la révéler. Tartaglia dévoile alors son secret à Cardan. Celui-ci trouve alors la solution générale des équations du troisième degré. Mais Cardan apprend ensuite que del Ferro avait trouvé la solution avant Tartaglia ; se sentant trompé, il publie le résultat dans le livre Ars magna en 1545 et s'en approprie la découverte. À cette époque, il est le meilleur algébriste de toute l'Europe. Une violent dispute s'ensuivit entre Cardan et Tartaglia, dans laquelle ce dernier manqua de perdre la vie.

La lecture du traité de Cardan est ennuyeuse pour celui qui l'aborde aujourd'hui : l'équation cubique est étudiée, cas après cas, selon que les termes apparaissent dans tel ou tel membre de l'équation, car les coefficients sont nécessairement positifs.

Bien que Cardan traite les équations avec des nombres, il pense géométriquement. Il a ainsi écrit : "Soit le cube et six fois le côté égal à 20" pour l'équation $x^3 + 6x = 20$.

Juanne de Tomini daCoi propose en 1540 à Cardan de résoudre $x^4+6x^2+36=60x$. Cardan n'y arrive pas, il demande de l'aide à Ferrari. Celui-ci arrive à ramener l'équation à une équation du troisième degré que l'on sait maintenant résoudre. On généralise alors la méthode consistant à ramener une équation du quatrième degré à une équation du troisième degré pour les résoudre. Cette résolution apparaît dans le livre Ars Magna de Cardan.

La résolution des équations cubiques et quartiques fut peut-être la plus grande contribution à l'algèbre depuis les Babyloniens, qui 4000 ans plutôt, avaient appris à compléter le carré pour la résolution des équations quadratiques. La solution de la cubique amène les mathématiciens à s'intéresser à de nouveaux nombres : les nombres irrationnels, négatifs et imaginaires.

En 1560, dans Algebra, Bombelli couronne l'oeuvre des savants italiens en réalisant la première étude véritable des nombres imaginaires.

(source : http ://www.lycee-international.com/travaux/histmath/tartaglia/)

9.4.1 Méthode de Cardan

Résolution de l'équation générale du troisième degré $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ $(a_3\neq 0)$.

Divisons tous les termes par a_3 ce qui donne $x^3+\frac{a_2}{a_3}x^2+\frac{a_1}{a_3}x+\frac{a_0}{a_3}=0$ et que nous allons réécrire

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

Cette forme de l'équation est appelée forme normale de l'équation du 3ᵉdegré.

Utilisons les «formules de Cardan» qu'il publia dans son «Ars magna». Substituons $x=z-\dfrac{a}{3}$ dans la forme normale de l'équation. Nous obtenons alors la forme réduite

$$z^3+pz+q=0,\text{ où }\begin{cases} p &= b-\dfrac{1}{3}a^2\\ q &= \dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{1}{3}ab+c\end{cases}$$

À toute solution z_0 de l'équation réduite correspond la solution $x_0=z_0-\frac{a}{3}$ de l'équation normale.

Pour $p=0$, la résolution de l'équation réduite est triviale : $\sqrt[3]{-q}$.

Dans le cas $p\neq 0$, substituons $z=u+v$ dans l'équation réduite. L'équation réduite devient alors

$$\begin{aligned} (u+v)^3+p(u+v)+q &= 0\\ \Longleftrightarrow\ u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+pu+pv+q &= 0\\ \Longleftrightarrow\quad (u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v) &= 0\end{aligned}$$

En considérant le système S d'équations

$$S:\begin{cases} u^3+v^3+q = 0 & (1)\\ 3uv+p = 0 & (2)\end{cases}$$

on voit que si $u=u_0$ et $v=v_0$ est une solution de ce système, c'est aussi une solution de l'équation réduite.

De l'équation (2), on déduit $v = -\dfrac{p}{3u}$. Substituons ensuite v dans l'équation (1).

$$
\begin{aligned}
u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad 27u^6 + 27qu^3 - p^3 &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad u^3 &= -\frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad u^3 &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}
\end{aligned}
$$

Ainsi, les solutions du système T suivant :

$$
T : \begin{cases} u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4}q^2 + \dfrac{1}{27}p^3} & (1) \\ 3uv + p = 0 & (2) \end{cases}
$$

sont aussi des solutions du système S. On est alors amené à résoudre la première équation qui est une équation de la forme

$$u^3 = k$$

Cette équation admet dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ les trois racines

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{k} \\
u_2 &= \sqrt[3]{k}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) \\
u_3 &= \sqrt[3]{k}\,\mathrm{cis}\left(-\tfrac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Ensuite, la résolution de l'équation $3uv + p = 0$ conduit aux valeurs v_1, v_2, v_3 correspondant à u_1, u_2, u_3. On obtient alors les racines de l'équation réduite :

$$z_1 = u_1 + v_1 \text{ avec } u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \text{ et } v_1 = -\frac{p}{3u_1}$$

$$z_2 = u_2 + v_2 = u_1\,\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + v_1\,\mathrm{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = u_3 + v_3 = u_1\,\mathrm{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + v_1\,\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Bien que la méthode générale pour résoudre de manière exacte une équation polynomiale du troisième degré soit connue, il est facile de comprendre que son application « papier-crayon » est un tantinet plus compliquée que celui de la formule quadratique pour le deuxième degré. C'est ce qui explique que son enseignement n'est pas au programme au secondaire et, non plus, au niveau collégial. Par contre, l'intérêt d'en faire ici la présentation est double. Montrer son existence d'une part, et, d'autre part, faire réaliser que cette méthode est celle qui est programmée dans les logiciels de calcul symbolique tel que MAPLE.

C'est les cas également pour les équations polynomiales du quatrième degré : elles peuvent être réduites à une équation polynomiale du troisième degré.

9.4.2 Résolution de l'équation du quatrième degré

La résolution de l'équation du quatrième degré est due à Ludovico Ferrari (1522-1560). Ludovico Ferrari est né à Bologne. À 14 ans, il est placé au service de Cardan. Il devient rapidement l'élève et l'ami de celui-ci.

En 1540, Ferrari quitte son maître à la suite de nombreuses querelles. Il va alors enseigner à Milan.

Le cardinal de Mantoue reconnaissant son grand talent, l'entretient et le protège. Il devient professeur à l'université de Bologne mais décède empoisonné par sa soeur. Ferrari vivait, comme Cardan et Tartaglia, à une époque de cruauté et de violence.

Voici, dans la notation algébrique d'aujourd'hui, la solution que Ferrari proposa pour obtenir les racines du polynôme

$$x^4 + px^2 + qx + r$$

Premièrement, en complétant le carré nous obtenons

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

c'est-à-dire

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

Alors, de cette façon, nous avons, quelque soit y

$$(x^2 + p + y)^2 = px^2 - qx - r + p^2 + 2y(x^2 + p) + y^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)(*)$$

Maintenant, le membre de droite est quadratique en x et nous pouvons choisir y de telle manière que ce membre devienne un carré parfait. Cela est possible en rendant le discriminant nul. Ainsi

$$(-q)^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0$$

En développant, on obtient l'équation équivalente suivante.

$$(q^2 - 4p^3 + 4pr) + (-16p^2 + 8r)y - 20py^2 - 8y^3 = 0$$

Nous constatons alors que cette équation est cubique en y.

Nous savons résoudre cette équation polynomiale de troisième degré. En résolvant cette équation pour y, reste à substituer la valeur de y dans le membre de droite de (*). Puisque le membre de droite est un carré parfait, il suffit de prendre la racine carré de chaque côté pour obtenir une équation quadratique en x.

En résolvant cette équation quadratique nous aurons alors les racines d'une équation du quatrième degré.

9.4.3 Utilisation de la formule de Cardan par MAPLE

Nous disposons donc de formules générales pour obtenir les racines des polynômes du premier, deuxième, troisième et du quatrième degré. Comme nous l'avons constaté, l'application de ces formules dans les cas du troisième et du quatrième degré, bien que possible, est très exigeante sur le plan du calcul. Heureusement que MAPLE connaît ces formules. Il les applique lorsque nous utilisons la macro-commande `solve`.

Pour le montrer dans le cas du troisième degré, résolvons l'équation $105x^3 - 105x^2 + 21x - 1 = 0$ avec la formule de Cardan précédente et directement avec la macro-commande `solve`.

Afin d'obtenir un affichage abrégé des prochains développements, activons le mode d'affichage `Typeset Notation` avec une requête initialisant la variable d'interface `prettyprint=2`.

```
> interface(prettyprint=2);
                                   3
```

Cette requête est nécessaire à moins que la configuration `Typeset Notation` de votre installation soit celle par défaut. Cette configuration peut être réalisée par l'intermédiaire de la barre des menus du programme MAPLE.

- Avec la version 9.5, il faut accéder à l'onglet `I/O Display` de la fenêtre que l'on fait apparaître en cliquant le sous-menu `Preferences...` du menu `File`.
- Avec la version 10, il faut accéder à l'onglet `Display` de la fenêtre que l'on fait apparaître en cliquant le sous-menu `Options...` du menu `Tools`.

De plus, rappelons que nous avons, par commodité, associé la lettre «i» minuscule à l'unité imaginaire.

Développons maintenant la résolution de l'équation avec la formule de Cardan.

```
> Formule:=root(-q/2+sqrt(q^2/4+p^3/27),3):
  Cardan_1:=Formule-p/(3*Formule);
```

$$Cardan\_1 := \frac{1}{6}(\%1)^{1/3} - \frac{2\,p}{(\%1)^{1/3}}$$

$$\%1 = -108\,q + 12\sqrt{81\,q^2 + 12\,p^3}$$

Effectuons la somme et rationalisons le dénominateur.

```
> Cardan_2:=radnormal(Cardan_1,rationalized);
```

$$Cardan\_2 := -\frac{1}{72}\,\frac{(\%1)^{1/3}\left(-12\,p^2 + (\%1)^{1/3}\sqrt{81\,q^2 + 12\,p^3} + 9\,(\%1)^{1/3}\,q\right)}{p^2}$$

$$\%1 = -108\,q + 12\sqrt{81\,q^2 + 12\,p^3}$$

Substituons l'équivalent des paramètres p et q et effectuons la substitution $x = z - \frac{a}{3}$.

```
> F_Cardan:=simplify(subs([p=b-1/3*a^2,q=2/27*a^3-1/3*a*b+c],Cardan_2-a/3));
```

$$F\_Cardan := -\frac{1}{24}\,\frac{-36\,(\%2)^{1/3}\,b^2 + 24\,(\%2)^{1/3}\,b\,a^2 - 4\,(\%2)^{1/3}\,a^4 + 3\,(\%2)^{2/3}\sqrt{\%1} + 2\,(\%2)^{2/3}\,a^3 - 9\,(\%2)^{2/3}\,a\,b + 27\,(\%2)^{2/3}\,c + 72\,a\,b^2 - 48\,b\,a^3 + 8\,a^5}{(-3\,b + a^2)^2}$$

$$\%1 := 12\,a^3\,c - 3\,a^2\,b^2 - 54\,a\,b\,c + 81\,c^2 + 12\,b^3$$

$$\%2 := -8\,a^3 + 36\,a\,b - 108\,c + 12\sqrt{\%1}$$

D'autre part, obtenons directement les racines de $x^3 + ax^2 + bx + c$ avec la macro-commande SOLVE.

```
> P:=x^3+a*x^2+b*x+c;
  Racines:=solve(P=0,{x});
```

$$P := x^3 + a x^2 + b x + c$$

$$Racines := \left\{ x = \frac{1}{6}(\%2)^{1/3} - \frac{6\left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2\right)}{(\%2)^{1/3}} - \frac{1}{3}a \right\},$$

$$\left\{ x = -\frac{1}{12}(\%2)^{1/3} + \frac{3\left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2\right)}{(\%2)^{1/3}} - \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}(\%3) \right\},$$

$$\left\{ x = -\frac{1}{12}(\%2)^{1/3} + \frac{3\left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2\right)}{(\%2)^{(1/3)}} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}(\%3) \right\}$$

$$\%1 = 12a^3c - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12b^3$$

$$\%2 = -8a^3 + 36ab - 108c + 12\sqrt{\%1}$$

$$\%3 = \frac{1}{6}(\%2)^{1/3} + \frac{6\left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2\right)}{(\%2)^{1/3}}$$

Nous montrerons l'égalité dans le cas d'une seule racine. Pointons vers la première racine et rationalisons-la.

```
> F_Maple:=radnormal(rhs(op(1,Racines[1])),rationalized);
```

$$F\_Maple := -\frac{1}{24}\,\frac{-36(\%2)^{1/3}b^2 + 24(\%2)^{1/3}ba^2 - 4(\%2)^{1/3}a^4 + 3(\%2)^{2/3}\sqrt{\%1} + 2(\%2)^{2/3}a^3 - 9(\%2)^{2/3}ab + 27(\%2)^{2/3}c + 72ab^2 - 48ba^3 + 8a^5}{a^4 - 6ba^2 + 9b^2}$$

$$\%1 = 12a^3c - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12b^3$$

$$\%2 = -8a^3 + 36ab - 108c + 12\sqrt{\%1}$$

Nous constatons que les formules `F_Cardan` et `F_Maple` sont équivalentes. Leur numérateur sont identiques mais le dénominateur de `F_Maple` est développé et celui de `F_Cardan` ne l'est pas.

Une évaluation simultanée des deux formules avec les coefficients du polynôme $x^3 - x^2 + \frac{21}{105}x - \frac{1}{105}$ va permettre de constater l'égalité des deux formules.

```
> eval(F_Cardan=F_Maple,[a=-1,b=21/105,c=-1/105]);
```

$$\%3 = \%3$$

$$\%1 = \frac{64}{35} + \frac{12}{6125}\sqrt{-32}\sqrt{6125}$$

$$\%2 = \frac{1}{7840}(\%1)^{2/3} + \sqrt{-32}\sqrt{6125}$$

$$\%3 = \frac{1}{6}(\%1)^{1/3} - \%2 + \frac{5}{42}(\%1)^{2/3} + \frac{1}{3}$$

```
> evalf(radnormal(%));
```

$$0.7503835499 + 0.\,\mathrm{i} = 0.7503835499 + 0.\,\mathrm{i}$$

L'imbrication de la macro-commande `radnormal` a permis de diminuer le cumul des erreurs d'arrondis.

Nous pourrions également développer en parallèle la méthode de Ferrari et la résolution avec la macro-commande `solve` d'une équation polynomiale du quatrième degré. Mais, s'il en a la curiosité, le lecteur pourrait très bien le faire au cours d'une session MAPLE personnelle.

Voici finalement deux autres exemples de résolution réalisés directement avec la macro-commande `solve`.

```
> P:=x^3-5*x^2+2*x+12;
  solve(P=0,{x});
```

$$P := x^3 - 5x^2 + 2x + 12$$

$$\{x = 3\},\ \{x = \sqrt{5} + 1\},\ \{x = 1 - \sqrt{5}\}$$

```
> P:=x^4+9*x^3-6*x^2-58*x-36;
  solve(P=0,{x});
```

$$P := x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 58x - 36$$

$$\{x = -2\},\ \{x = -9\},\ \{x = 1 + \sqrt{3}\},\ \{x = 1 - \sqrt{3}\}$$

Avec un polynôme du quatrième degré, MAPLE ne donnera pas toujours les racines explicitement. Parce qu'en générale, la formulation exacte des racines avec des radicaux est beaucoup trop compliquée et cela est rarement utile (comprendre rarement informatif).

```
> P:=x^4+x+1;
  solve(P=0,{x});
```

$$P := x^4 + x + 1$$

$$\{x = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + \_Z + 1, \mathit{index} = 1)\},\ \{x = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + \_Z + 1, \mathit{index} = 2)\},$$
$$\{x = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + \_Z + 1, \mathit{index} = 3)\},\ \{x = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + \_Z + 1, \mathit{index} = 4)\}$$

Comme nous le constatons, la macro-commande `RootOf` a été utilisée par MAPLE pour réaliser un affichage implicite des racines du polynôme $x^4 + x + 1$. Cette macro-commande permet de pointer implicitement vers les racines d'un polynôme et offre la possibilité de traiter analytiquement les racines sans qu'il soit nécessaire de les obtenir explicitement. Nous aurons l'occasion, un peu plus loin, de présenter plus en détails cette macro-commande.

Tout de même, il est possible de forcer MAPLE à afficher explicitement les racines. Cela peut être fait en initialisant la variable d'environnement `_EnvExplicit` comme suit :

```
> _EnvExplicit:=true;
```

$$\mathit{\_EnvExplicit} := \mathit{true}$$

```
> solve(P=0,{x});
```

$$\left\{x=\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\%1}+\frac{1}{12}\sqrt{-\%4}\right\},\left\{x=\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\%1}-\frac{1}{12}\sqrt{-\%4}\right\},\left\{x=-\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\%1}+\frac{1}{12}\sqrt{-\%5}\right\},\left\{x=-\frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{\%1}-\frac{1}{12}\sqrt{-\%5}\right\}$$

$$\%1=\frac{(108+12\,\mathrm{i}\sqrt{687})^{2/3}+48}{(108+12\,\mathrm{i}\sqrt{687})^{1/3}}$$

$$\%2=6\sqrt{\%1}\,(108+12\,\mathrm{i}\sqrt{687})^{2/3}$$

$$\%3=72\sqrt{6}\,(108+12\,\mathrm{i}\sqrt{687})^{1/3}$$

$$\%4=\frac{\%2+288\sqrt{\%1}+\%3}{(108+12\,\mathrm{i}\sqrt{687})^{1/3}\sqrt{\%1}}$$

$$\%5=\frac{\%2+288\sqrt{\%1}-\%3}{(108+12\,\mathrm{i}\sqrt{687})^{1/3}\sqrt{\%1}}$$

Revenons au mode d'affichage `Standard Math Notation` et initialisons à `false` la variable d'environnement `_EnvExplicit`.

```
> _EnvExplicit:=false;
  interface(prettyprint=3);
```

$$\_EnvExplicit := false$$

$$2$$

Remarque : En initialisant subséquemment la variable `_EnvExplicit:=false`, toutes les racines qui ne sont pas rationnelles seront automatiquement affichées de manière implicite sans être indexées avec la macro-commande `RootOf`. Non seulement pour les racines des équations polynomiales de degré 4 mais aussi pour toutes les racines des équations polynomiales de degré inférieur à 4. Et ce, durant toute la session de travail. En effet,

```
> Racines:=solve(x^2-5=0);
```

$$Racines := \mathrm{RootOf}(\_Z^2-5, label=\_L3)$$

Pour obtenir alors les racines, il faudra utiliser la macro-commande `allvalues` par exemple.

```
> allvalues(Racines);
```

$$\sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

Il est, bien sûr, possible d'exécuter la macro-commande `restart` afin de ré-initialiser l'environnement mais n'oubliez pas alors la perte, par ce lavage de cerveaux, de toutes les assignations courantes de la session MAPLE.

Après avoir trouvé comment on peut obtenir les racines de polynômes du troisième et du quatrième degré, il est naturel de chercher d'autres formules pour obtenir les racines de polynômes de degrés supérieurs.

Or, nous pouvons affirmer qu'il n'y a pas de formule algébrique générale pouvant donner les racines de n'importe quel polynôme d'un degré supérieur à quatre. Cela a été prouvé en 1821 par Niels Abel pour les polynômes de degré 5 et par Évariste Galois en 1829 pour le cas général.

Mais, bien qu'il ne peut y avoir de formule générale pour exprimer avec des radicaux les racines d'un polynôme de degré supérieur à quatre, dans certain cas de polynôme de degré supérieur à quatre, il peut être possible de donner les racines de manière exacte avec des radicaux.

Mais, en fait, qu'en est-il de l'existence de racines d'un polynôme de degré quelconque $n > 4$?

9.5 Théorème fondamental de l'algèbre

On reconnaît que c'est l'Allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui démontra en 1799, avec une rigueur relative, l'un des plus fameux théorèmes de l'algèbre, soit le théorème fondamental de l'algèbre. Énoncé cent soixante-dix ans plus tôt par le Français Albert Girard, ce théorème, appelé parfois théorème de d'Alembert-Gauss, fut l'objet de sa thèse de doctorat. La preuve qu'il a présentée ne rencontrerait pas le standard de rigueur d'aujourd'hui d'une preuve mathématique. Après la publication de sa première preuve, Gauss a tout de même publié successivement trois autres démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre. On retrouvera un excellent article sur le théorème fondamental de l'algèbre sur le site «The MacTutor History of Mathematics archive» de l'université St-Andrews, en Écosse :

http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra.html

Cet article intéressant met en relief les travaux des différents mathématiciens qui ont précédés Gauss et également les travaux de ceux qui l'ont suivis.

Énonçons maintenant le théorème fondamental de l'algèbre : TFA.

Théorème 3 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme de* $\mathbb{C}[z]$ *de degré* $n \geq 1$ *admet au moins une racine complexe* $r \in \mathbb{C}$*.*

Nous allons accepter ce théorème sans démonstration. La démonstration de de théorème exige des connaissances mathématiques dépassant le niveau de notre cours.

Nous avons alors le corollaire suivant.

Corollaire 2 (Théorème du facteur linéaire)**.** *Tout polynôme complexe*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ \dots \ + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

de degré $n \geq 1$ *admet au moins un facteur linéaire* $(z - r)$ *où* $r \in \mathbb{C}$*.*

Preuve : Soit P un polynôme complexe. Puisque P possède au moins une racine complexe $r \in \mathbb{C}$, il suffit d'évoquer le théorème de factorisation. En effet, puisque $\mathrm{P}(r) = 0$, nous avons $z - r$ facteur du polynôme P. □

Dans ce cas, quel que soit un polynôme complexe

$$\mathrm{P} = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ \dots \ + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

de degré $n \geq 1$, puisque ce polynôme possède au moins une racine complexe r_1, nous avons

$$P = (x - r_1)Q_1$$

où Q_1 est un polynôme complexe de degré $n-1$.

Le théorème fondamental de l'algèbre s'applique aussi au polynôme Q_1 si, bien sûr, $n-1 \geq 1$. Nous avons alors une deuxième racine r_2 et $Q_1 = (z - r_2)Q_2$. Nous avons alors

$$P = (x - r_1)(z - r_2)Q_2$$

L'application du TFA s'applique tant et aussi longtemps que le polynôme quotient Q_p est d'un degré supérieur ou égal à 1. À la fin, le polynôme P est décomposé en un produit de n facteurs linéaires et d'un facteur de degré 0 soit a_n.

$$P = (z - r_1)(z - r_2)\ldots(z - r_{n-1})(z - r_n)a_n$$

Ce développement démontre le théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème 4 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme de $\mathbb{C}[z]$ de degré $n \geq 1$ admet n racines complexes $r_1, r_2, \ldots r_n$ pas nécessairement toutes distinctes deux à deux.*

En conséquence, tout polynôme complexe

$$P = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

peut s'exprimer comme un produit de facteurs linéaires et d'un facteur a_n de degré 0.

$$P = a_n(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)\ldots(z - r_n)$$

Cette décomposition du polynôme P est appelé factorisation complète de P dans $\mathbb{C}[z]$.

Remarque 1 : Ces racines ne sont pas nécessairement toutes distinctes deux à deux et dans le cas où une racine est d'ordre de multiplicité k, cette racine est comptée comme k racines.

Remarque 2 : Cette décomposition en ces facteurs est unique si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs linéaires, bien sûr.

Le TFA nous garantit l'existence des racines mais ne nous donne aucune méthode pour les trouver. Nous allons donc aborder une série de théorèmes qui donneront des pistes de recherche afin de trouver des racines (réelles ou imaginaires) d'un polynôme.

Mais avant, présentons une heuristique intéressante justifiant le théorème de d'Alembert-Gauss. Avec MAPLE, nous allons présenter une argumentation qui justifie à un tel point ce théorème que cela encouragerait la recherche d'une démonstration mathématique rigoureuse si cette démonstration n'avait pas encore été trouvée.

9.6 Heuristique du TFA

Cet argument heuristique a été proposé la première fois par le professeur Gilbert Labelle de l'université du Québec à Montréal (UQAM) en 1974.

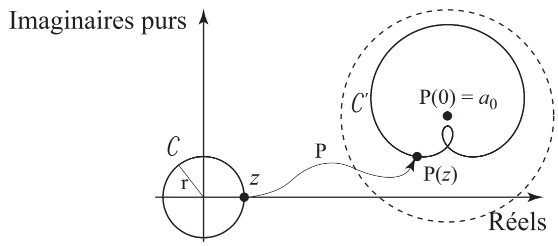
Soit un polynôme complexe $P = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ de degré $n \geq 1$. Considérons la fonction polynomiale associée

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = P \end{aligned}$$

Dans le plan complexe, considérons comme domaine de la fonction polynomiale définie par $\mathrm{P}(z)$ l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = r \text{ où } r < |a_0|\}$$

$\mathcal{C}$ étant un cercle dans le plan complexe de rayon $r < |a_0|$ centré à l'origine, $\mathcal{C}' = \mathrm{Im}(\mathcal{C})$ sera une courbe fermée entourant le point d'affixe a_0 et entièrement contenue dans un disque centré au point d'affixe a_0. On montre en analyse complexe que l'affirmation précédente est la conséquence de la continuité des fonctions polynomiales.



Pour mieux saisir ce qui vient d'être exposé, illustrons, avec MAPLE, cette situation avec un cas particulier. Soit la fonction polynomiale définie par $\mathrm{P}(z) = z^3 - 2iz^2 - z + 3 + i$ et soit le domaine $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 0,5\}$. Nous avons bien $r = 0,5 < |a_0| = |3+i| = \sqrt{10}$.

La procédure `Imagine` ci-dessous permet de tracer un graphique illustrant un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r (en couleur orange) et son image $\mathcal{C}$' (en couleur navy) obtenue avec la fonction associée à un polynôme P. Les deux premiers arguments de cette procédure sont respectivement le polynôme ainsi que le rayon.

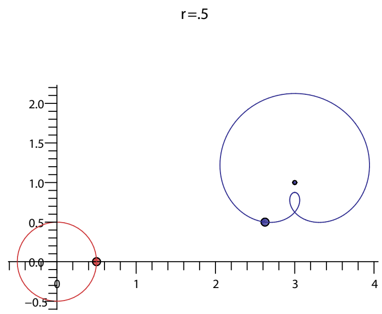
Il y a un troisième et dernier argument qui spécifiera si on désire réaliser une animation montrant l'image de quelques points régulièrement espacés du cercle centré à l'origine.

```
> Imagine:=proc(P::polynom,r::nonnegative,Avec::name)
   local Animation,f,Points,Point_Image,Point_Pré_image,Var;
   Var:=op(1,indets(P));
   f:=t->subs(Var=t,P);
   Points:=proc()
   plots[display](
   plottools[circle]([0,0],r,color=orange),
   plottools[disk]([Re(tcoeff(f(t))),Im(tcoeff(f(t)))],0.05*r,color=navy),
   plot([Re(f(r*exp(Complex(1)*t))),Im(f(r*exp(Complex(1)*t))),t=0..2*Pi],
               title=cat("r = ",convert(r,string)),titlefont=[TIMES,ROMAN,10],
               color=navy,numpoints=200),axesfont=[TIMES,ROMAN,10])
   end:
   if Avec=oui then
    Point_Pré_image:=plottools[disk](
                    [Re(r*exp(Complex(1)*t)),Im(r*exp(Complex(1)*t))],0.1*r,
                    color=orange):
    Point_Image:=plottools[disk](
                    [Re(f(r*exp(Complex(1)*t))),Im(f(r*exp(Complex(1)*t)))],0.1*r,
                    color=navy):
    Animation:=seq(plots[display](
                    [eval(Point_Pré_image,t=k),eval(Point_Image,t=k),Points()]),
                    k=evalf([seq(t*2*Pi/24,t=0..24)])):
   else
    Animation:=plots[display]([Points()]) fi;
    plots[display](Animation,insequence=true,scaling=constrained)
  end:
```

Les requêtes ci-dessous permettront de tracer dans le plan complexe le cercle $\mathcal{C}$ centré à l'origine de rayon $r = 0,5$, son image $\mathcal{C}$' et de créer une animation montrant le parcours de l'image d'un point sur la circonférence du cercle centré à l'origine.

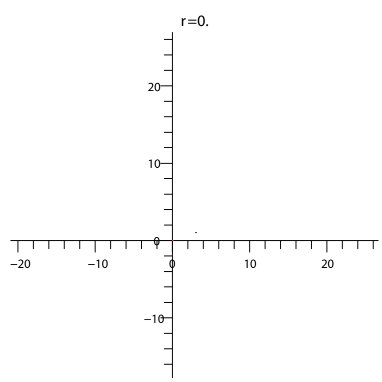
Cela devrait faire comprendre finalement que l'image d'un cercle centré à l'origine dans le plan complexe par la fonction associée à un polynôme P est bien une courbe fermée bornée par un cercle centrée au point d'affixe a_0.

```
> P:=z**3-2*i*z**2-z+3+i:
  r:=0.5:
  Imagine(P,r,oui);
```



Avec une seconde animation, nous allons augmenter progressivement la valeur du rayon r du cercle $\mathcal{C}$ tout en prenant des valeurs inférieurs à $|a_0| = |3+i| = \sqrt{10} \approx 3,16$. Et nous observerons attentivement les différentes images $\mathcal{C}$' que nous allons obtenir. En fait, nous allons observer l'animation de 24 ensemble-images $\mathcal{C}$' de 24 cercles $\mathcal{C}$ centrés à l'origine de 24 valeurs de rayons $r < a_0$.

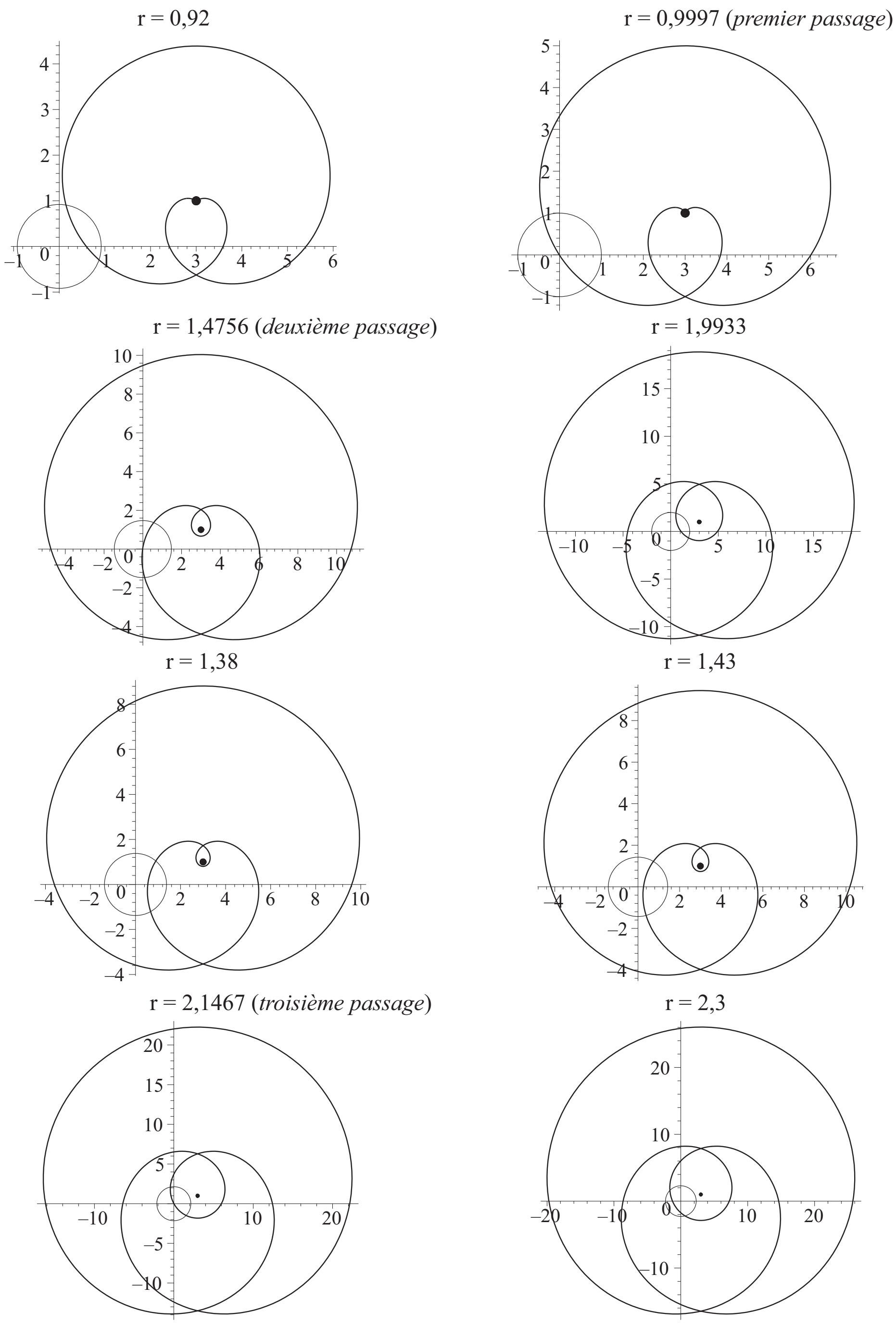
```
> r_max:=2.3:
  n_images:=24:
  T:=seq(Imagine(P,r,non),r=[seq(t*r_max/n_images,t=0..n_images)]):
  display(T,insequence=true,scaling=constrained);
```



Ce qu'il faut observer au cours de cette animation c'est que pour certaines valeurs de rayon r, les images C' passent par l'origine. Dans le cas particulier de ce polynôme P du troisième degré, il y a exactement trois telles images C'. C'est donc que cette heuristique mets en évidence trois nombres complexes r_1, r_2 et r_3 dont l'évaluation est $\mathrm{P}(r_1) = 0$, $\mathrm{P}(r_2) = 0$ et $\mathrm{P}(r_2) = 0$.

Voici huit images $\mathcal{C}$' de huit cercles $\mathcal{C}$ qui ont été générées avec MAPLE. Il y en a trois qui passent par l'origine : ce sont les images des cercles $\mathcal{C}$ de rayon $r \approx 0,9997$, $r \approx 1,4756$ et $r \approx 2,1467$.

L'animation nous convainc assez facilement qu'après le troisième passage d'une image $\mathcal{C}$' par l'origine, il n'y a plus d'encerclement de l'origine du plan complexe par des images $\mathcal{C}$' lorsque $r > 2,1467$. Ce qui nous porte à penser que le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^3 - 2iz^2 - z + 3 + i$ possède exactement trois racines distinctes. On pourrait faire une heuristique similaire avec un polynôme complexe de degré 4, de degré 5 et ainsi de suite. Il y aurait tout lieu de croire aussi, que pour tout polynôme complexe de degré n, il y aurait n passages par l'origine des images $\mathcal{C}$' de cercle $\mathcal{C}$ centré à l'origine de rayon r lorsque $r \to |a_0|^-$. Les connaissances mathématiques en analyse complexe montre formellement que c'est effectivement le cas à la condition, bien sûr, que **le polynôme possède *n* racines complexes distinctes**. Sinon, il y a autant de passages par l'origine d'images $\mathcal{C}$' qu'il y a de racines distinctes du polynôme P.



9.7 Flopée de théorèmes utiles à la recherche des racines d'un polynôme

Présentons maintenant un premier théorème d'une série qui s'avéreront utiles pour nous guider dans la recherche des racines d'un polynôme complexe.

Théorème 5 (Théorème des racines conjuguées)**.** *Si un **polynôme complexe à coefficients réels** admet une racine imaginaire z alors le conjuguée complexe $\overline{z}$ est également une racine imaginaire de ce polynôme.*

Preuve : Soit $P = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ un polynôme complexe dont les coefficients $a_k \in \mathbb{R}$ et soit z une racine imaginaire du polynôme P. Montrons que le conjugué complexe $\overline{z}$ est aussi une racine imaginaire du polynôme P en montrant que $\mathrm{P}(\overline{z}) = 0$.

$$\begin{array}{rrll}
 & P(\overline{z}) & = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + a_{n-2}\overline{z}^{n-2} + \ldots + a_2\overline{z}^2 + a_1\overline{z} + a_0 & \text{Évaluation de P avec } \overline{z} \\
\Longleftrightarrow & & = \overline{a}_n\overline{z}^n + \overline{a}_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \overline{a}_{n-2}\overline{z}^{n-2} + \ldots + \overline{a}_2\overline{z}^2 + \overline{a}_1\overline{z} + \overline{a}_0 & \text{Car } a \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow & & = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z} + \overline{a}_0 & \text{Conjugué d'un produit} \\
\Longleftrightarrow & & = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} & \text{Conjugué d'une somme} \\
\Longleftrightarrow & & = \overline{\mathrm{P}(z)} & \text{Définition de P} \\
\Longleftrightarrow & & = \overline{0} & \text{Par hypothèse, } z \text{ est une racine} \\
\Longleftrightarrow & & = 0 &
\end{array}$$

Ce qui montre que $\overline{z}$ est aussi une racine imaginaire du polynôme P si z en est une. □

Ce théorème affirme donc que les racines imaginaires d'un **polynôme complexe à coefficients réels** viennent toujours par paires conjugués deux à deux.

Dans le cas d'un polynôme complexe de degré 4 à coefficients réels, la connaissance d'une seule racine imaginaire nous permettra de factoriser complètement ce polynôme dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.

Exemple 9.7

Obtenons la factorisation complète dans $\mathbb{C}[x]$ du polynôme $\mathrm{P} = x^4 - x^3 + 18x^2 + 83x + 29$ sachant que $2 - 5\,i$ est une racine de ce polynôme.

Puisque les coefficients du polynôme P sont des nombres réels, $2 + 5\,i$ est aussi une racine. Ainsi $x - (2 - 5\,i)$ et $x - (2 + 5\,i)$ sont deux facteurs linéaires de P. Le polynôme P est ainsi divisible par le produit $(x - (2 - 5\,i))(x - (2 + 5\,i))$, soit le polynôme quadratique $x^2 - 4x + 29$. La division nous donne

$$x^4 - x^3 + 18x^2 + 83x + 29 = (x^2 - 4x + 29)(x^2 + 3x + 1)$$

Et puisque les racines de $x^2 + 3x + 1$ sont $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, nous avons alors la *factorisation complète dans* $\mathbb{C}[x]$ du polynôme P.

$$x^4 - x^3 + 18x^2 + 83x + 29 = (x - 2 + 5\,i)(x - 2 - 5\,i)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Remarquons l'existence de deux racines imaginaires et de deux racines irrationnelles (réelles).

Nous pouvons généraliser la situation précédente. Lorsque w et $\overline{w}$ sont racines imaginaires d'un polynôme complexe P **à coefficients réels**, $x - w$ et $x - \overline{w}$ sont deux facteurs linéaires du polynôme P. Alors, le produit

$(x-w)(x-\overline{w})$ est un aussi un facteur du polynôme. Or, ce facteur

$$\begin{aligned}(x-w)(x-\overline{w}) &= x^2-(w+\overline{w})x+w\overline{w}\\ &= x^2-2\mathrm{Re}(w)x+|w|^2\end{aligned}$$

est un *facteur quadratique à coefficients réels*. Ce polynôme réel ne peut pas évidemment être factorisé dans $\mathbb{R}[x]$. On dit dans de tel cas, que le polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

Théorème 6 (Théorème de factorisation complète dans $\mathbb{R}[x]$)**.** *Tout polynôme complexe **à coefficients réels** peut s'exprimer comme un produit de facteurs linéaires réels et/ou de facteurs quadratiques réels irréductibles dans* $\mathbb{R}[x]$.

Preuve : À partir de la factorisation complète dans $\mathbb{C}[x]$ du polynôme complexe à coefficients réels, il suffit de multiplier entre eux les facteurs linéaires dont les racines imaginaires sont conjuguées l'une de l'autre afin d'obtenir les facteurs quadratiques réels irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$. Les autres facteurs de la factorisation complète dans $\mathbb{C}[x]$ sont nécessairement des facteurs linéaires à coefficients réels.

Ce qui montre que tout polynôme complexe à coefficients réels peut s'exprimer comme un produit de facteurs linéaires réels et/ou de facteurs quadratiques réels irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$. □

Ainsi, à partir de la factorisation complète dans $\mathbb{C}[x]$ du polynôme $\mathrm{P}=x^4-x^3+18x^2+83x+29$

$$x^4-x^3+18x^2+83x+29=(x-2+5\,i)(x-2-5\,i)\left(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

on déduit la factorisation complète dans $\mathbb{R}[x]$ de ce polynôme.

$$x^4-x^3+18x^2+83x+29=(x^2-4x+29)\left(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Théorème 7 (Théorème des racines rationnelles)**.** *Si un polynôme complexe à coefficients rationnels admet une racine irrationnelle de la forme $r=a+b\sqrt{c}$ où $a,b,c\in\mathbb{Q}$ ($c\in\mathbb{Q}$ n'est donc pas un carré parfait), alors le conjugué algébrique de r, soit $a-b\sqrt{c}$ est aussi une racine de ce polynôme.*

Preuve : Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[x]$, un polynôme complexe à coefficients rationnels. Montrons que si $r=a+b\sqrt{c}$ est une racine, alors $r=a-b\sqrt{c}$ en est une également.

Si $b=0$, tout est prouvé, alors supposons $b\neq 0$. Soit le polynôme $\mathrm{D}=(x-a-b\sqrt{c})(x-a+b\sqrt{c})=x^2-2ax+a^2-b^2c$. Le polynôme D est clairement un polynôme à coefficients rationnels puisque a,b et c le sont. Maintenant, considérons la division $\mathrm{P}\div\mathrm{D}$. L'algorithme de la division

$$\mathrm{P}=\mathrm{D}\,\mathrm{Q}+\mathrm{R}$$

établit l'existence d'un quotient Q et un reste R dont le degré est 1 ou 0.

Montrons que le polynôme reste est nécessairement le polynôme nul. Supposons que $\mathrm{R}=\mathrm{e}x+\mathrm{f}$. Les coefficients e et f sont nécessairement des nombres rationnels. En effet, puisque les polynômes P et D sont à coefficients rationnels, les polynômes Q et R le sont nécessairement.

Alors, nous pouvons écrire

$$\mathrm{P}=\mathrm{D}\,\mathrm{Q}+(ex+f)$$

et, dans ce cas, nous avons
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(a+b\sqrt{c}) &= 0\\
&= \mathrm{D}(a+b\sqrt{c})\,\mathrm{Q}(a+b\sqrt{c})+e\,(a+b\sqrt{c})+f\\
&= 0\,\mathrm{Q}(a+b\sqrt{c})+e\,(a+b\sqrt{c})+f\\
&= e\,(a+b\sqrt{c})+f
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité nous permet de déduire que $e = f = 0$.

Ce qui montre que $\mathrm{D} = (x-a-b\sqrt{c})(x-a+b\sqrt{c})$ divise le polynôme P

$$\mathrm{P} = \mathrm{D}\,\mathrm{Q}$$

Ainsi $\mathrm{P}(a-b\sqrt{c}) = 0$ et donc que $a-b\sqrt{c}$ est aussi une racine du polynôme P. □

Exemple 9.8

Sachant que $\sqrt{5}$ et $1-i$ sont deux racines du polynôme $\mathrm{P} = x^5+x^3-4x^4+16x^2-30x+20$, donner la factorisation complète du polynôme P dans $\mathbb{R}[x]$.

Puisque le polynôme P est à coefficients rationnels, nous avons alors que le polynôme

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-1+i)(x-1-i)\\
&= (x^2-5)(x^2-2x+2)\\
&= x^4-3x^2-2x^3+10x-10
\end{aligned}$$

divise le polynôme P dans $\mathbb{C}[x]$. Appliquons l'algorithme de la division à P÷D.

$$x^5+x^3-4x^4+16x^2-30x+20 = (x^4-3x^2-2x^3+10x-10)(x-2)$$

La factorisation complète du polynôme P dans $\mathbb{R}[x]$ est alors

$$x^5+x^3-4x^4+16x^2-30x+20 = (x-2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2-2x+2)$$

Exercices suggérés : 1 à 10 à la page 173

Dans le cas de n'importe quel **polynôme complexe P à coefficients réels** de degré n impair, nous sommes certains que de tels polynômes possèdent au moins une racine réelle. Ce sont le TFA et le théorème des racines conjuguées qui nous permettent de l'affirmer. Mais qu'en est-il du signe de cette racine ? Cette racine est-elle positive ou négative ? Ce polynôme P pourrait-il avoir d'autres racines positives ou négatives ou seulement d'autres racines imaginaires ? Ces interrogations se posent également pour les polynômes complexes à coefficients réels de degré pair.

La règle des signes de Descartes nous donne le moyen d'envisager le nombre possible de racines réelles négatives ou positives **d'un polynôme complexe à coefficients réels** et donc d'envisager, en même temps, le nombre possible de racines imaginaires.

Cette règle, sans être une méthode pour trouver des racines d'un polynôme, nous donne quand même des indications sur la nature possible des racines d'un polynôme complexe à coefficients réels et donc, éventuellement, aider à orienter la recherche des racines du polynôme.

Théorème 8 (Règle des signes de Descartes)**.** *Pour tout polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[x]$ *à coefficients réels de degré* $n \geq 1$ *et à terme constant non nul,*

i) le nombre de racines positives du polynôme P est soit égal au nombre de variation de signes (V^+) *dans* $\mathrm{P}(\alpha)$*, soit égal à ce nombre* (V^+) *diminué d'un entier pair.*

ii) le nombre de racines négatives du polynôme P est soit égal au nombre de variation de signes (V^-) *dans* $\mathrm{P}(-\alpha)$*, soit égal à ce nombre* (V^-) *diminué d'un entier pair.*

Nous allons accepter ce théorème sans démonstration bien que la preuve ne dépasse pas le niveau de ce cours. La longueur de la preuve (plus de trois pages) ne permet pas d'avoir une meilleure compréhension de l'énoncé du théorème.

Voyons plutôt comment nous allons appliquer ce théorème.

Exemple 9.9

À l'aide de la règle des signes de Descartes, discutons la nature des racines du polynôme $\mathrm{P} = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$. Déterminons d'abord le nombre de variation de signes V^+ et V^-.

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{P}(\alpha) & = & 2\alpha^5 - 7\alpha^4 + 3\alpha^2 + 6\alpha - 5 & \Longrightarrow \mathrm{V}^+ = 3 \\ \mathrm{P}(-\alpha) & = & 2(-\alpha)^5 - 7(-\alpha)^4 + 3(-\alpha)^2 + 6(-\alpha) - 5 & \\ & = & -2\alpha^5 - 7\alpha^4 + 3\alpha^2 - 6\alpha - 5 & \Longrightarrow \mathrm{V}^- = 2 \end{array}$$

Nous avons alors le tableau suivant qui résume les quatre possibilités concernant le nature des racines que la règle de Descartes permet de déduire.

r_+	r_-	$\{0\}$	Im	Total
3	2	0	0	5
3	0	0	2	5
1	2	0	2	5
1	0	0	4	5

TABLE 1 – Tableau des signes de Descartes

Voici un deuxième exemple d'application de la règle des signes de Descartes.

Exemple 9.10

Discutons la nature des racines du polynôme $\mathrm{P} = 3x^6 - x^4 - x^2$. Étant donné que le terme constant du polynôme P est nul, nous devons réécrire le polynôme P comme suit : $\mathrm{P} = x^2(3x^4 - x^2 - 1)$ et nous allons ensuite déterminer le nombre de variation de signes V^+ et V^- du polynôme $3x^4 - x^2 - 1$. Les possibilités concernant le nature des racines du polynôme $3x^4 - x^2 - 1$ sont aussi celles du polynôme $\mathrm{P} = x^2(3x^4 - x^2 - 1)$.

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{P}(\alpha) & = & 3\alpha^4 - \alpha^2 - 1 & \Longrightarrow \mathrm{V}^+ = 1 \\ \mathrm{P}(-\alpha) & = & 3(-\alpha)^4 - (-\alpha)^2 - 1 & \\ & = & 3\alpha^4 - \alpha^2 - 1 & \Longrightarrow \mathrm{V}^- = 1 \end{array}$$

Nous avons alors le tableau suivant qui résume les possibilités concernant le nature des racines du polynôme $\mathrm{P} = 3x^6 - x^4 - x^2$.

r_+	r_-	$\{0\}$	Im	Total
1	1	2	2	6

TABLE 2 – Tableau des signes de Descartes

Dans ce cas-ci, nous sommes certain de l'existence de quatre racines réelles et de deux racines imaginaires.

Exercice suggéré : 11 à la page 173

Le prochain théorème, sans donner, encore une fois, de méthode pour trouver les racines d'un polynôme, trouve certainement son utilité dans la recherche des racines des polynômes de $\mathbb{C}[x]$ à coefficients réels.

Théorème 9 (Théorème du produit et de la somme des racines)**.** *Soit un polynôme complexe unitaire à coefficients réels de degré $n \geq 1$*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Alors, *i)* *$-a_{n-1}$ est égal à la somme de toutes les racines r_i de ce polynôme*

$$-a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} r_i$$

ii) *$(-1)^n a_0$ est égal au produit de toutes les racines r_i de ce polynôme :*

$$(-1)^n a_0 = \prod_{i=1}^{n} r_i$$

Preuve : Nous allons démontrer ce théorème par induction mathématique.

Vérifions la première condition de l'axiome d'induction en montrant que ces deux formules sont vraies avec $n = 1$.

Lorsque $n = 1$, le polynôme est de la forme $x + a_0$. Dans ce cas, l'unique racine du polynôme est $r_1 = -a_0$. Il est donc vrai que $-a_0$ est égale à la somme de toutes les racines. Ce qui montre l'égalité de la première formule avec $n = 1$

$$-a_0 = \sum_{i=1}^{1} r_i$$

Aussi, nous avons l'égalité $-a_0 = (-1)^1 a_0 = r_1$. Il est donc vrai que $(-1)^1 a_0$ est égale au produit de toutes les racines

$$(-1)^1 a_0 = \prod_{i=1}^{1} r_i$$

Ce qui montre l'égalité de la seconde formule avec $n = 1$.

Avant de formuler l'hypothèse d'induction pour vérifier la seconde condition de l'axiome d'induction, prenons le temps de vérifier les deux formules lorsque $n = 2$. Cela pourra permettre au lecteur de mieux saisir le développement mathématique qui va venir.

Dans le cas où nous avons un polynôme de degré 2 unitaire, nous avons l'égalité

$$(x-r_1)(x-r_2) = x^2 + (-r_1 - r_2)x + r_1 r_2$$

Il apparaît donc clairement

$$\begin{array}{rcl} -a_1 & = & r_1 + r_2 \\ (-1)^2 a_0 & = & r_1 r_2 \end{array}$$

(Reconnaissez-vous la méthode somme-produit pour la factorisation du polynôme unitaire du deuxième degré ?)

Formulons maintenant l'hypothèse d'induction. Supposons que, pour un polynôme de degré $n = k$, les deux formules sont vraies :

$$\begin{cases} -a_{k-1} & = \sum_{i=1}^{k} r_i \\ (-1)^k a_0 & = \prod_{i=1}^{k} r_i \end{cases}$$

Montrons maintenant la véracité de deux formules avec $n = k+1$.

Soit $\mathrm{P} = (x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_k)(x-r_{k+1})$ un polynôme réel de degré $n = k+1$ ayant $k+1$ racines et soit $\mathrm{Q} = (x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_k)$. Alors Q étant de degré k, nous avons, par hypothèse d'induction que pour le polynôme $\mathrm{Q} = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$:

$$\begin{cases} -a_{k-1} & = \sum_{i=1}^{k} r_i \\ (-1)^k a_0 & = \prod_{i=1}^{k} r_i \end{cases}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P} & = & \mathrm{Q} \cdot (x - r_{k+1}) \\ & = & (x-r_{k+1})(x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \\ & = & x^{k+1} + a_{k-1}x^k + \ldots + a_1 x^2 + a_0 x + \\ & & \quad (-r_{k+1})x^k + (-r_{k+1})a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + (-r_{k+1})a_1 x + (-r_{k+1})a_0 \\ & = & x^{k+1} + [a_{k-1} + (-r_{k+1})]\, x^k + \ldots + [a_0 - r_{k+1}a_1]\, x + [-r_{k+1}]\, a_0 \end{array}$$

Par hypothèse d'induction, nous pouvons posé

$$a_{k-1} + (-r_{k+1}) = -\sum_{i=1}^{k} r_i + (-r_{k+1}) = -\sum_{i=1}^{k+1} r_i$$

Ce qui montre la première formule, soit que l'opposé du coefficient dominant secondaire du polynôme P est égale à la somme de ses $(k+1)$ racines

$$-[a_{k-1} + (-r_{k+1})] = \sum_{i=1}^{k+1} r_i$$

et

$$[-r_{k+1}]\, a_0 = [-r_{k+1}]\, (-1)^k \prod_{i=1}^{k} r_i = (-1)^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} r_i$$

Ce qui montre la deuxième formule, soit que $(-1)^{k+1}$ fois le terme constant du polynôme P est égale au produit de ses $(k+1)$ racines

$$(-1)^{k+1}\left[-r_{k+1}\right]a_0 = \prod_{i=1}^{k+1} r_i$$

Ainsi, la seconde condition de la preuve par induction mathématique est vérifiée.

Nous avons montré que les deux conditions de l'axiome d'induction mathématique sont satisfaites, on peut donc conclure que pour tout polynôme unitaire à coefficients réels de degré $n \geq 1$

$$-a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} r_i \text{ et } (-1)^n a_0 = \prod_{i=1}^{n} r_i$$

□

Remarque : Ce théorème peut être utile pour vérifier la justesse des racines trouvées. Il suffit de calculer la somme et le produit des racines pour détecter des erreurs de calculs qui auraient été faites en trouvant les racines.

De plus, la dernière racine à trouver peut être déduite de la somme de toutes les $n-1$ autres racines.

Exemple 9.11

Donner un polynôme du deuxième degré de la forme $x^2 + a_1x + a_0$ dont les racines sont -2 et $\frac{1}{3}$.
Puisque

$$\begin{aligned} -a_1 &= \text{somme des racines} \\ &= -\tfrac{5}{3} \\ &\text{et} \\ (-1)^2 a_0 &= \text{produit des racines} \\ &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

On déduit que le polynôme cherché est $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$.

Si le polynôme demandé avait été plutôt un polynôme de la forme $a_2x^2 + a_1x + a_0$, c'est-à-dire que la restriction qu'il soit unitaire n'était pas obligatoire, il y aurait alors une infinité de réponses de la forme

$$kx^2 + \frac{5k}{3}x - \frac{2k}{3} \qquad k \neq 0$$

Le théorème du produit et de la somme des racines établit en fait une plus large relation entre les racines et les coefficients dans le cas d'un polynôme unitaire. Soit donc un polynôme unitaire

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Nous accepterons sans démonstration les relations suivantes entre les coefficients et les racines :

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= \text{somme des racines (produit des racines prises une à la fois)} \\ a_{n-2} &= \text{somme des produits des racines prises 2 à la fois} \\ -a_{n-3} &= \text{somme des produits des racines prises 3 à la fois} \\ a_{n-4} &= \text{somme des produits des racines prises 4 à la fois} \\ &\vdots \\ (-1)^n a_0 &= \text{produit de toutes les racines (somme du produit des racines prises } n \text{ à la fois)} \end{aligned}$$

Exemple 9.12

Soit le polynôme unitaire x^3-8x^2+9x+k. Déterminer k sachant que l'une des racines de ce polynôme est le double d'une autre racine.

Soit $a, 2a$ et b les racines. Alors, la somme des racines permet de poser l'égalité $-(-8)=a+2a+b$, c'est-à-dire l'égalité

$$3a+b=8 \qquad (1)$$

La somme des produits des racines prises 2 à la fois permet de poser l'égalité $9=a(2a)+a(b)+2a(b)$ c'est-à-dire l'égalité

$$2a^2+3ab=9 \qquad (2)$$

Le produit de toutes les racines permet de poser l'égalité $-k=a(2a)b$ c'est-à-dire l'égalité

$$k=-2a^2b \qquad (3)$$

La résolution simultanée du système formé par les équations (1) et (2) donne les paires de solutions $a=3, b=-1$ et $a=\frac{3}{7}, b=\frac{47}{7}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (3), nous obtenons

$$k=18 \text{ et } k=-\frac{846}{343}$$

Voici un théorème qui donne une méthode pour rechercher les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers P$\in \mathbb{Z}[x]$ si, évidemment, le polynôme en possède.

Théorème 10 (Théorème des racines rationnelles)**.** *Soit un polynôme* $\mathrm{P}=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ *à coefficients entiers de degré* $n\geq 1$ *et à terme constant non nul et soit* $\dfrac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ *une fraction irréductible.*

Si $\dfrac{c}{d}$ *est une racine du polynôme P, alors c est un facteur de* a_0 *et d est un facteur de* a_n.

Preuve : Soit $\mathrm{Q}=x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2}+\ldots+\frac{a_2}{a_n}x^2+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}$. Les racines du polynôme Q sont évidemment les racines du polynôme P et réciproquement. En vertu du théorème du produit des racines, le produit des racines du polynôme Q est la fraction $(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}$. Alors, si la fraction irréductible $\dfrac{c}{d}$ est une racine, c doit être nécessairement un facteur de a_0 et d être nécessairement un facteur de a_n. □

Ainsi, pour trouver les racines rationnelles (s'il en existe) d'un polynôme P$\in\mathbb{Z}[x]$, il suffit d'établir la liste de tous les candidats rationnels $\mathbf{\frac{c}{d}}$ de telle manière que **c** soit un facteur du terme **c**onstant et que **d** soit un facteur du coefficient **d**ominant.

$$\text{Racines rationnelles possibles} = \frac{\text{Facteurs du terme constant}}{\text{Facteurs du coefficient dominant}}$$

Remarque 1 : On peut appliquer le théorème sur les racines rationnelles aux polynômes à coefficients rationnels P$\in\mathbb{Q}[x]$ en multipliant le polynôme P par le PPCM de tous les dénominateurs des coefficients.

Remarque 2 : Il découle de ce théorème que les racines entières d'un polynôme unitaire à coefficients entiers P$\in\mathbb{Z}[x]$ sont nécessairement parmi les diviseurs du terme constant a_0.

Exemple 9.13

Déterminons, s'il y en a, les racines rationnelles du polynôme $P = 3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8$.

Étudions d'abord la nature réelle ou imaginaire des racines de ce polynôme. Un polynôme complexe du quatrième degré peut très bien posséder quatre racines imaginaires (conjuguées deux à deux) et donc, aucune racine réelle et par conséquent aucune racine rationnelle. Or

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= 3\alpha^4 + 14\alpha^3 + 14\alpha^2 - 8\alpha - 8 \\ P(-\alpha) &= 3\alpha^4 - 14\alpha^3 + 14\alpha^2 + 8\alpha - 8 \end{aligned}$$

Ce qui montre que $V^+ = 1$ et que $V^- = 3$. Nous sommes alors certain que le polynôme P possède au moins une racine réelle positive et au moins une racine réelle négative. Il est donc pertinent d'utiliser le théorème des racines rationnelles.

Établissons la liste des candidats rationnels aux racines du polynôme P.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Facteurs de } a_0}{\text{Facteurs de } a_n} &= \pm\frac{1,2,4,8}{1,3} \\ &= \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}\right\} \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de tester les candidats. Par substitution directe, nous voyons que ni 1 ni -1 ne sont des racines. Testons ensuite -2. Nous allons le faire par substitution synthétique car c'est un moyen très rapide de tester un candidat et, de plus, si le candidat testé est une racine, nous obtenons en même temps le polynôme quotient. Cela est intéressant. Le polynôme quotient peut permettre de réduire quelque peu la liste initiale des candidats à tester.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 3 & 14 & 14 & -8 & -8 \\ & & -6 & -16 & 4 & 8 \\ \hline -2 & 3 & 8 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

Cela montre que -2 est une racine et nous avons alors

$$P = (x+2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$$

Les autres racines du polynôme P doivent être des racines du polynôme quotient Q. Ainsi, les candidats $\pm\frac{8}{3}$ ne sont plus à tester. Ni d'ailleurs les candidats ± 8. En effet, on le constate en établissant la liste des candidats du polynôme quotient.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Facteurs de } a_0}{\text{Facteurs de } a_n} &= \pm\frac{1,2,4}{1,3} \\ &= \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\right\} \end{aligned}$$

Après quelques essais, nous avons trouvé que le candidat $-\frac{2}{3}$ est une racine.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 8 & -2 & -4 \\ & & -2 & -4 & 4 \\ \hline -\frac{2}{3} & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= (x+2)(x+\tfrac{2}{3})(3x^2+6x-6) \\ &= 3(x+2)(x+\tfrac{2}{3})(x^2+2x-2) \end{aligned}$$

Utilisons la formule quadratique pour obtenir les racines du polynôme x^2+2x-2.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2^2-4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ce qui montre que le polynôme P possède exactement deux racines rationnelles -2 et $-\frac{2}{3}$.

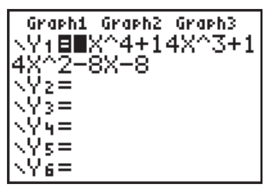
Tant qu'à y être, factorisons complètement dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme P.

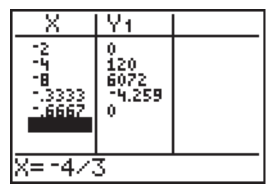
$$3x^4+14x^3+14x^2-8x-8 = 3(x+2)(x+\tfrac{2}{3})(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$$

Tester les candidats un à un est un travail bête de calcul. La calculatrice est un outil tout à fait désigné pour accomplir de telles tâches.

Voici une procédure à suivre avec la calculatrice TI-84 Plus (et TI-83 Plus) pour tester rapidement si le candidat rationnel est une racine du polynôme. Utilisons la capacité du calculateur à saisir des formules pour ensuite faire rapidement des évaluations de ces formules.

— Avec les touches `2nd-TBLSET`, sélectionner dans `DEFINIR TABLE`, le mode `DEM` du paramètre `Valeurs`.
— Avec la touche `Y=` saisir la formule $3x^4+14x^3+14x^2-8x-8$.
— Avec les touches 2nd-TABLE, accéder au mode manuel de calcul. Saisir ensuite la valeur d'un candidat à tester.





Ainsi, lorsque qu'une racine rationnelle r_1 est trouvée avec la calculatrice, il suffit ensuite d'effectuer la division synthétique. Comme on le sait, cela va permettre d'obtenir le polynôme quotient et établir alors une nouvelle liste de candidats rationnels à partir du polynôme quotient. Comme l'a montré l'exemple précédent, il est possible que cela puisse éliminer des candidats rationnels de la liste initiale.

Exercices suggérés : 12 à la page 173

Le choix d'un candidat à tester est fait au hasard. Le théorème des racines rationnelles ne nous indique pas du tout par quel candidat il est préférable de commencer ni préférablement avec lequel poursuive. Le test du candidat $-\frac{2}{3}$ pourrait bien avoir été fait après les candidats $\pm 2, \pm 4, \pm 8$ et $\frac{2}{3}$ ou, par un coup de chance, le tester immédiatement après le candidat -2. Les notions de majorant et de minorant peut éventuellement aider à choisir plus judicieusement le candidat suivant à tester.

Définition 2 (Majorant)**.** *Un nombre M est un majorant d'un ensemble $E \neq \varnothing$ non vide ssi*

$$\forall x \in E, x \leq M$$

Par exemple, 2 et $\sqrt{5}$ sont deux majorants de l'ensemble $\left\{1, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{15}{8}, 2\right\}$.

Définition 3 (Minorant). *Un nombre m est un minorant d'un ensemble $E \neq \varnothing$ non vide ssi*

$$\forall x \in E, x \geq m$$

Par exemple, -1 et 2 sont deux minorants de l'ensemble $\{4, 5, 6, 7\}$.

Théorème 11 (Théorème des majorants et des minorants). *Soit un polynôme à coefficients réels* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ *de degré $n \geq 1$ dont le coefficient dominant est positif $a_n > 0$*

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Alors

i) si $a > 0$ et si chaque nombre de la dernière ligne de la division synthétique du polynôme P par $(x-a)$ sont tous de même signe, alors le nombre a est un majorant aux racines réelles du polynôme P.

ii) si $a < 0$ et si le signe de chaque nombre de la dernière ligne de la division synthétique du polynôme P par $(x-a)$ alterne, alors le nombre a est un minorant aux racines réelles du polynôme P.

Dans le cas de l'apparition de zéros à la dernière ligne de la division synthétique, on accordera le signe + ou − à chaque valeur zéro pour accommoder soit la parité des signes soit l'alternance des signes permettant, si possible, de conclure à un majorant ou à un minorant.

Nous allons accepter ce théorème sans démonstration.

Le théorème des majorants et minorants trouve son utilité dans l'élimination de certains candidats rationnels dans la recherche des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. En effet, si, par exemple, lors du test avec la division synthétique, d'un candidat rationnel positif, on observe que tous les nombres de la troisième ligne sont de même signe, ce candidat étant un majorant aux racines réelles, il devient alors inutile de tester tous les candidats supérieurs à celui-ci.

Exemple 9.14

Soit le polynôme $\mathrm{P} = 4x^3 + 15x - 36$. La liste des candidats est assez impressionnante :

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Facteurs de } a_0}{\text{Facteurs de } a_n} &= \pm \frac{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36}{1, 2, 4} \\
&= \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{4}\right\}
\end{aligned}$$

Pour limiter le nombre de candidats à tester, trouvons un majorant et un minorant aux racines réelles et donc rationnelles du polynôme P. Nous ne pouvons y aller que d'une manière systématique.

Recherche d'un majorant aux racines : testons systématiquement les entiers $1, 2, \ldots$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 4 & 0 & 15 & -36 \\ & & 4 & 4 & 19 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 19 & -17 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 4 & 0 & 15 & -36 \\ & & 8 & 16 & 62 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 31 & 26 \end{array}$$

On peut donc conclure qu'il n'y a pas de racines réelles et donc rationnelles plus grandes ou égales à 2.

Recherche d'un minorant aux racines : testons systématiquement les entiers $-1, -2, \ldots$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 4 & 0 & 15 & -36 \\ & & -4 & 4 & -19 \\ \hline -1 & 4 & -4 & 19 & -55 \end{array}$$

On peut donc conclure qu'il n'y a pas de racines réelles et donc rationnelles plus petites ou égales à -1.

Puisque les seules racines rationnelles possibles sont supérieures à -1 et inférieures à 2, la liste des candidats est donc réduite à la liste suivante :

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}\right\}$$

Posons-nous la question suivante : dans le contexte actuel, soit celui de la recherche des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[x]$, un candidat peut-il être à la fois racine et majorant ? La réponse est oui.

Exemple 9.15

Considérons à nouveau le polynôme de l'exemple précédent, soit le polynôme $\mathrm{P} = 4x^3 + 15x - 36$. Dans la recherche d'un majorant aux racines rationnelles, si le premier candidat que nous avions testé dans l'exemple précédent avait été plutôt le candidat $\frac{3}{2}$, observons ce qu'aurait été, dans ce cas, le résultat de la division synthétique.

Recherche d'un majorant aux racines : testons le candidat $\frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 4 & 0 & 15 & -36 \\ & & 6 & 9 & 36 \\ \hline \frac{3}{2} & 4 & 6 & 24 & 0 \end{array}$$

La troisième ligne montre clairement que le candidat $\frac{3}{2}$ est à la fois racine et majorant.

Également, il est possible qu'un candidat soit à la fois racine et minorant aux racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

Cela est une situation des plus intéressante. Avec l'information que nous donne cette seule division synthétique, nous sommes certain que le polynôme P n'a plus aucune autre racine réelle positive (et non pas seulement rationnelle positive). En effet, d'une part, le théorème des majorants et minorants nous permet d'affirmer que $\frac{3}{2}$ est un majorant aux racines réelles et, d'autre part, la règle des signes de Descartes nous permet de conclure qu'il n'y a plus aucune autre racine réelle positive pour le polynôme P puisque V^+ du polynôme quotient est alors égal à 0.

Une situation similaire peut également se produire avec un candidat qui serait à la fois racine et minorant aux racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

Terminons cette section avec un petit raisonnement mathématique faisant intervenir à la fois la règle de Descartes et le théorème des racines rationnelles.

Exemple 9.16

Soit le polynôme $\mathrm{P} = x^5 - x^3 - 1$. Puisque $V^+ = 1$, la règle de Descartes nous permet d'affirmer que le polynôme possède une seule racine positive. Attention : nous n'avons pas établit que le polynôme P possède nécessairement qu'une seule racine réelle.

L'unique candidat rationnel positif aux racines réelles est 1 (Pourquoi ?). Puisque $\mathrm{P}(1) = -1 \neq 0$, force est de conclure donc que cette racine positive est irrationnelle.

Exercices suggérés : 12 à 14 à la page 173

9.8 Polynôme et approche graphique

Le tracé de la fonction associée à un polynôme est certainement très utile pour rechercher les racines d'un polynôme, car les racines d'un polynôme correspondent aux zéros de la fonction associée. Dans le cas des racines réelles, le théorème suivant permet de fixer une borne inférieure m et supérieure M aux racines réelles d'un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ (et donc aussi aux racines rationnelles).

Théorème 12 (Bornes des racines d'un polynôme)**.** *Soit un polynôme unitaire* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ *de degré* $n \geq 1$

$$\mathrm{P} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Soit
- $M_1 = 1 + \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|\}$
- $M_2 = \max\{1, |a_0| + |a_1| + |a_2| \ldots + |a_{n-1}|\}$
- $M = \min\{M_1, M_2\}$.

Alors, chaque racine (réelle) de ce polynôme est comprise entre $-M$ *et* M.

Nous allons accepter ce théorème sans démonstration.

Il est fort intéressant de connaître cette valeur M. Cela sera d'une grande utilité pour déterminer un premier intervalle $[-M, M]$ afin de tracer le graphique de la fonction associée. Avec un outil graphique, cela permettra de mettre en évidence tous les sous-intervalles contenant un zéro réel de la fonction et donc de permettre une sélection plus efficace des candidats rationnels à tester.

Exemple 9.17

Soit de nouveau le polynôme $P = 3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8$. En considérant

$$P = 3\left(x^4 + \frac{14}{3}x^3 + \frac{14}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}\right)$$

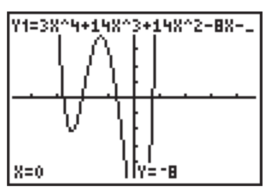
nous pouvons poser

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 1 + \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|\} \\ &= 1 + \max\left\{\tfrac{8}{3}, \tfrac{14}{3}\right\} \\ &= \tfrac{17}{3} \\ \\ M_2 &= \max\{1, |a_0| + |a_1| + |a_2| \ldots + |a_{n-1}|\} \\ &= \max\left\{1, \tfrac{8}{3} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{14}{3} + \tfrac{14}{3}\right\} \\ &= \max\left\{1, \tfrac{44}{3}\right\} \\ &= \tfrac{44}{3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} M &= \min\{M_1, M_2\} \\ &= \min\left\{\tfrac{17}{3}, \tfrac{44}{3}\right\} \\ &= \tfrac{17}{3} \end{aligned}$$

Toutes les racines réelles de ce polynôme et donc tous les candidats rationnels appartiennent à l'intervalle

$$[-M, M] = \left[-\frac{17}{3}, \frac{17}{3}\right]$$

La valeur M est alors un bon choix pour `Xmin` et `Xmax` pour la fenêtre de la calculatrice graphique. Ainsi, obtenons le tracé de la fonction polynomiale définie par $f(x) = 3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8$ en choisissant la fenêtre $[-\frac{17}{3}, \frac{17}{3}]$ sur $[-5, 5]$. Les valeurs pour `Ymin`, `Ymax` n'ont pas vraiment d'importance. Ce que importe ici est de se donner les éléments nécessaires pour l'axe des x pour être en mesure d'effectuer un choix éclairé des candidats à tester. Donnons-nous ici un pas de 1 unité pour les valeurs d'abscisses et de 5 unités pour les valeurs de l'ordonnées.



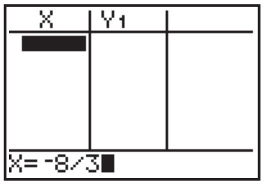
Le graphique permet d'apercevoir toutes les racines réelles et donc permet de choisir efficacement les candidats rationnels à tester. Puisque la graduation de l'axe des x est l'unité, nous constatons que $x = -2$ semble être une racine rationnelle et qu'il y a trois autres racines réelles dans les intervalles $]-3, -2[$, $]-1, 0[$ et $]0, 1[$. Nous aurons finalement, en plus du candidat $x = -2$ à tester que seulement les candidats $-\frac{8}{3} \in]-3, -2[$, $-\frac{2}{3} \in]-1, 0[$ et $\frac{2}{3} \in]0, 1[$ de la liste initiale établit à l'exemple de la page 162 en vertu du théorème des racines rationnelles

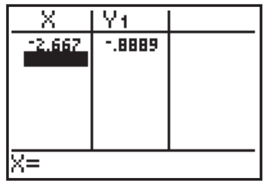
$$\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}\right\}$$

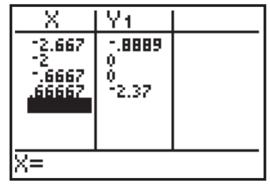
Grâce au graphique, nous réduisons la liste de 16 candidats à quatre seulement

$$\left\{-\frac{8}{3}, -2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Selon la procédure décrite à la page 163, testons ces quatre candidats. Vous devez saisir la fraction $-\frac{8}{3}$ telle quelle, le calculateur transformera automatiquement ce nombre en nombre à virgule.







Cette manière de mettre en évidence des racines réelles d'un polynôme est plutôt rapide. Dans ce cas-ci, comme le polynôme P ne possède que deux zéros rationnels $-2, -\frac{2}{3}$ et que le graphique de la fonction associée montre qu'il y a quatres zéros réels, on conclut que les deux autres zéros sont irrationnels. Puisque que c'est un polynôme de degré 4, il est alors nécessaire quand même d'effectuer les divisions synthétiques successives (par $(x-2)$ et par $(x-\frac{2}{3})$) pour obtenir un dernier polynôme quotient nécessairement quadratique (pourquoi ?) sur lequel on appliquera la formule quadratique pour obtenir ses racines irrationnelles. C'est ce que nous ferions s'il ne s'agissait pas d'un polynôme déjà donné en exemple (voir page 162).

Exercices suggérés : 15 à 18 à la page 173

Le prochain chapitre fera intervenir la calculatrice graphique ainsi que MAPLE dans le cadre de méthodes d'approximations successives pour calculer efficacement la valeur approximative d'une racine irrationnelle d'un polynôme.

9.9 La macro-commande `RootOf`

Nous avons déjà constaté lors de la résolution d'équations polynomiales l'utilisation par MAPLE d'étiquettes (voir exemple à la page 148). Ces étiquettes, en pointant vers des sous-expressions, permettent d'abréger l'écriture des racines. Le mécanisme de la simplification automatique utilise parfois un autre type d'abréviation pour les racines qui implique la macro-commande `RootOf`.

Mais attention, lorsqu'au cours d'une session MAPLE, la variable d'environnement a été initialisée une première fois à la valeur booléenne *false*, le mécanisme de la simplification automatique n'indexera plus les racines lorsque l'utilisation de la macro-commande `RootOf` est requise par le mécanisme de la simplification automatique. C'est le cas ici , voir page 148.

```
> Polynôme:=x^4-12*x^2+6*x-2;
  Racines:=solve(Polynôme=0,x);
```

$$Polynôme := x^4 - 12x^2 + 6x - 2$$

$$Racines := \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, label = \_L5)$$

Pour être en mesure de pointer vers ces racines, il faut forçer une indexation des racines. Il suffit alors de préciser l'option `implicit`.

```
> Racines:=allvalues(%,implicit);
```

$$Racines := \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 1), \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 2),$$
$$\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 3), \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 4)$$

Les racines, bien que formulées implicitement, peuvent quand même être opérées sous cette forme. Obtenons leur somme ainsi que leur produit.

```
> Somme:=add(Racines[k],k=1..4);
  Produit:=product(Racines[k],k=1..4);
```

$$Somme := \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 1) + \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 2) + \mathrm{RootOf}(\%1, index = 3) + \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 4)$$

$$Produit := \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 1)\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 2)\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 3)\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 4)$$

Tentons de simplifier cette somme et ce produit en utilisant la macro-commande `simplify`.

```
> Sum('Racines'[k],k=1..4)=simplify(Somme);
  Product('Racines'[k],k=1..4)=simplify(Produit);
```

$$\sum_{k=1}^{4} Racines_k = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2 + index = 1) + \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 2) + + \mathrm{RootOf}(\%1, index = 3) + \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2 + index = 4)$$

$$\prod_{k=1}^{4} Racines_k = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 1)\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 2)\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 3)\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 12\_Z^2 + 6\_Z - 2, index = 4)$$

La macro-commande `simplify` n'a pas été très utile. Utilisons plutôt la macro-commande d'évaluation des nombres algébriques `evala`.

```
> Sum('Racines'[k],k=1..4)=evala(Somme);
  Product('Racines'[k],k=1..4)=evala(Produit);
```

$$\sum_{k=1}^{4} Racines_k = 0$$

$$\prod_{k=1}^{4} Racines_k = -2$$

La somme et le produit des racines que nous avons obtenues sont conformes aux valeurs prévues au théorème de la somme et du produit des racines.

À l'aide de la macro-commande `evalf`, nous pouvons obtenir une approximation décimale de ces racines.

```
> evalf(Racines);
```

$$3.213494904, 0.2481552597 + 0.3258587477\,i, -3.709805424, 0.2481552597 - 0.3258587477\,i$$

Nous constatons que le polynôme $x^4 - 12x^2 + 6x - 2$ possède deux racines réelles et deux racines imaginaires. Nous pouvons, bien sûr, faire afficher la forme exacte de chacune de ces racines. Par exemple, pour la première racine :

```
> radnormal(allvalues(Racines[1]));
```

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{120}\sqrt{28800-\%1-\%2+\%3}\\
&\quad+\frac{1}{360}\sqrt{3}\Big(172800+3600\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{1/3}\\
&\quad+\frac{1053}{2}\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{2/3}-\frac{3}{2}\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{2/3}\sqrt{3}\sqrt{25067}\\
&\quad+3040\sqrt{28800-\%1-\%2+\%3}\\
&\quad+277\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{1/3}\sqrt{28800-\%1-\%2+\%3}\\
&\quad-\frac{1}{3}\sqrt{28800-\%1-\%2+\%3}\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{1/3}\sqrt{3}\sqrt{25067}\\
&\quad+\frac{451}{15}\sqrt{28800-\%1-\%2+\%3}\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{2/3}\\
&\quad-\frac{1}{15}\sqrt{28800-\%1-\%2+\%3}\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{2/3}\sqrt{3}\sqrt{25067}\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$\%1=1200\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{1/3}$$

$$\%2=\frac{351}{2}\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{2/3}$$

$$\%3=\frac{1}{2}\left(2106+6\sqrt{3}\sqrt{25067}\right)^{2/3}\sqrt{3}\sqrt{25067}$$

Nous aurions pu éviter l'utilisation des étiquettes %1, %2 et %3 dans le résultat précédent. Il aurait suffit d'affecter la valeur de vérité `false` à la variable système `labelling`. Cela peut être fait à l'aide de la macro-commande `interface`

```
interface(labelling=false)
```

Nous aurions eu alors un affichage assez monstrueux de la valeur exacte de cette racine. Heureusement que la valeur par défaut de la variable `labelling` est la valeur de vérité `true`.

Rappelons tout de même qu'il est possible de forcer en tout temps un affichage explicite des racines. Pour ce faire, il faut affecter à la variable d'environnement `_EnvExplicit` la valeur de vérité `true`.

```
_EnvExplicit=true
```

Faites donc l'expérience d'exécuter de nouveau « `Racines:=solve(Polynôme=0,x);` » mais en ayant préalablement initialiser la variable système `labelling` avec la valeur `false` ainsi qu'en assignant à la variable d'environnement `_EnvExplicit` la valeur `true`. Cela devrait vous convaincre qu'il est souhaitable de ne pas faire afficher, par défaut, les racines de manière exactes mais d'en laisser le contrôle à l'usager.

Il serait préférable ensuite de revenir à la configuration par défaut en exécutant la requête `restart`.

```
> restart;
```

9.10 La factorisation avec MAPLE

Il est important de savoir que la macro-commande `factor` effectue la factorisation du polynôme avec le corps engendré par ses coefficients.

Effectuez la factorisation des polynômes suivants :
— $6x^2 - x - 2$
— $x^3 - 1$
— $x^2 - 6$

```
> Polynôme:=6*x^2-x-2:
  Polynôme=factor(Polynôme);
```

$$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$$

La macro-commande `factor` factorisera un polynôme sur la base du corps auquel appartient ses coefficients. En conséquence, si les coefficients du polynôme à factoriser sont tous des entiers, alors la factorisation sera effectuée sur le corps des rationnels avec des facteurs irréductibles à coefficients entiers où, éventuellement, les facteurs obtenus ne seront pas nécessairement du premier degré (facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}$).

```
> Polynôme:=x^3-1:
  Polynôme=factor(Polynôme);
```

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Le facteur (x^2+x+1) a des coefficients entiers et est irréductible dans $\mathbb{Q}$ (pourquoi ?). Il en est de même pour le polynôme $x^2 - 6$.

```
> Polynôme:=x^2-6:
  Polynôme=factor(Polynôme);
```

$$x^2 - 6 = x^2 - 6$$

Montrons que la factorisation est effectivement réalisée sur le base des coefficients du polynôme.

```
> Polynôme:=x^2-6.:
  Polynôme=factor(Polynôme);
```

$$x^2 - 6. = (x+2.449489743)(x-2.449489743)$$

Cette fois, les coefficients du polynôme à factoriser ne sont pas tous des entiers et la factorisation a été faites sur $\mathbb{R}$.

Factorisons de nouveau le polynôme $x^3 - 1$ en tapant le nombre décimal « 1. » au lieu de l'entier « 1 ».

```
> Polynôme:=x^3-1.:
  Polynôme=factor(Polynôme);
```

$$x^3 - 1. = (x-1.)(x^2 + 1.000000000x + 1.000000000)$$

Nous constatons effectivement que la factorisation a été faite sur $\mathbb{R}$.

En spécifiant l'option `complex`, la factorisation sera réalisée sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Avec cette option, il n'est pas nécessaire d'utiliser le point décimal.

```
> Polynôme:=x^3-1:
  Polynôme=factor(Polynôme,complex);
```

$$x^3-1=(x+.5000000000+.8660254038\,\mathrm{i})(x+.5000000000-.8660254038\,\mathrm{i})(x-1.)$$

Considérons à nouveau le polynôme x^2-6. Cette factorisation n'a pas été faite telle que nous nous serions attendu qu'elle soit faite, c'est-à-dire comme une différence de carrés. Vous savez maintenant pourquoi.

$$x^2-6=(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$$

Pour obtenir cette factorisation, il faut préciser, dans la macro-commande `factor`, l'extension quadratique sur laquelle on désire factoriser. Dans ce cas-ci. il faut donc préciser, en option, l'extension quadratique $\sqrt{6}$.

```
> Polynôme:=x^2-6:   # Rendons à nouveau tous les coefficients rationnels
  Polynôme=factor(Polynôme,sqrt(6));
```

$$x^2-6=(x+\sqrt{6})\,(x-\sqrt{6})$$

Puisque `RootOf` permet de pointer vers les racines d'un polynôme, cette macro-commande peut être utilisée justement pour préciser ***implicitement*** l'extension algébrique *lorsque cela est requis pour effectuer la factorisation*.

```
> Polynôme=factor(Polynôme,RootOf(Polynôme,index=1));
```

$$x^2-6=(x+\mathrm{RootOf}(\_Z^2-6,index=1))(x-\mathrm{RootOf}(\_Z^2-6,index=1))$$

Reste à obtenir *explicitement* les facteurs avec la macro-commande `allvalues`.

```
> allvalues(%);
```

$$x^2-6=(x+\sqrt{6})\,(x-\sqrt{6})$$

Effectuons, de cette manière, la factorisation du polynôme $\frac{2}{3}x^2-7$.

```
> Polynôme:=2/3*x^2-7:
  Polynôme=allvalues(factor(Polynôme,RootOf(Polynôme,index=1)));
```

$$\frac{2}{3}x^2-7=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{42}\right)\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{42}\right)$$

Exercices suggérés : 1 à 7 à la page 175

9.11 Exercices série 6.2

1. Les informations suivantes sont-elles contradictoires ? Justifier.
   a) P est un polynôme complexe à coefficients réels de degré 3 dont les trois racines sont $2+i$, $2-i$ et $1+i$.
   b) P est un polynôme complexe à coefficients réels de degré 3 dont les trois racines sont 1, $-3-i$ et $3+i$.

2. Soit P est un polynôme complexe à coefficients réels de degré 4 dont trois de ses racines sont 2, $1+2i$ et $1-2i$. Expliquer pourquoi la quatrième racine est nécessairement un nombre réel.

3. Les factorisation suivantes sont-elles complètes dans $\mathbb{R}[x]$? Dans la négative, donner la factorisation complète dans $\mathbb{R}$.
   a) $P = (-2)(x-3)(x^4-9)$
   b) $P = 3(x-1)(x-2)(x^2+3x-2)$
   c) $P = 5(x+1)(x^2+2)(x^2+5x+8)$

4. Les factorisation suivantes sont-elles complètes dans $\mathbb{C}$? Dans la négative, donner la factorisation complète dans $\mathbb{C}$.
   a) $P = (-2)(x-3)(x^4-9)$
   b) $P = 3(x-1)(x-2)(x^2+3x-2)$
   c) $P = 5(x+1)(x^2+2)(x^2+5x+8)$

5. Donner un polynôme complexe de degré $n \geq 1$ le plus petit possible.
   a) à coefficients complexes dont trois des racines sont $r_1 = 0, r_2 = -\frac{2}{3}$ et $r_3 = 3-i$.
   b) à coefficients réels dont deux des racines sont $r_1 = 2i$, et $r_2 = 2\sqrt{3}$.
   c) à coefficients rationnels dont deux des racines sont $r_1 = 1-i$, et $r_2 = 3\sqrt{2}-1$.
   d) à coefficients entiers dont trois des racines sont $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{3}$ et $r_3 = \frac{1}{4}$.

6. Trouver les quatre racines du polynôme $x^4+2x^2+1 \in \mathbb{C}[x]$.

7. Trouver les quatre racines du polynôme $x^4-3x^3+5x^2-27x-36 \in \mathbb{C}[x]$ sachant que l'une de ses racines est imaginaire pure.

8. Donner un polynôme de $\mathbb{Q}[x]$ de degré $n \geq 1$ le plus petit possible sachant que l'une de ses racines est
   a) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}+\sqrt{-1}$

9. Sachant que les nombres 2 et 4 sont des racines du polynôme $3x^3-17x^2+\ldots$, trouver alors la racine manquante et donner complètement ce polynôme.

10. Soit le polynôme P$= x^3-2ix^2+x-2i$.
    a) Montrer que i et $-i$ sont des racines de ce polynôme.
    b) Déterminer la troisième racine.
    c) Cela contredit-il le théorème des racines complexes conjugués ? Justifier.

11. Construire le tableau de la règle des signes de Descartes afin d'établir le nombre possible de racines positives, négatives, nulles et imaginaires des polynômes ci-dessous.
    a) $P = -6x^5+x^4+5x^3+x+1$
    b) $P = x^8-x^5$
    c) $P = 2x^6+5x^5+2x^2-3x+4$
    d) $P = x^6+2x^4+5x^2+9$
    e) $P = 3x^4+2x^3-4x+2$
    f) $P = 5x^5-6x^3-4x^2$
    g) $P = x^6-1$
    h) $P = 2x^3+x^2+3x-5$

12. Trouver, s'il y en a, toutes les racines rationnelles de chaque polynôme ci-dessous.

    a) $P = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$
    b) $P = x^3 - x - 6$
    c) $P = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$
    d) $P = 2x^4 + x^2 + 2x - 4$
    e) $P = x^3 - 2x^2 - 31x + 20$
    f) $P = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6$

13. Montrer que le nombre $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

14. a) Soit $P = x^4 - x^3 + x^2 + 2x + 4$. Montrer, par division synthétique, que la valeur 1 est un majorant des racines du polynôme P.

    b) Soit $P = 2x^3 + x^2 + 8x + 4$. Montrer, par division synthétique, que la valeur -1 est un minorant des racines du polynôme P.

15. Trouver un majorant et un minorant aux racines réelles des polynômes ci-dessous.

    a) $x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ b) $x^3 + x^2 - 6$

16. Trouver les racines réelles et factoriser complètement dans $\mathbb{R}[x]$ les polynômes ci-dessous en respectant les étapes suivantes.

    ① Construire le tableau de la règle des signes de Descartes.
    ② Donner la liste de tous les candidats rationnels pour les racines.
    ③ Trouver un majorant et un minorant aux racines réelles du polynôme.
    ④ Tester chaque candidat de la liste réduite avec votre calculateur graphique comme montré à la page 163. Dans le cas où le candidat est une racine, obtenir le polynôme quotient par division synthétique et établir une nouvelle liste de candidats.
    ⑤ Obtenir, s'il y a lieu, les racines irrationnelles avec la formule quadratique.
    ⑥ Finalement, donner la factorisation complète dans $\mathbb{R}[x]$ du polynôme.

    a) $P = x^3 - x^2 + 3x - 27$
    b) $P = x^3 + 2x + 12$
    c) $P = 2x^5 + x - 66$
    d) $P = 3x^4 + 7x^2 + 6$
    e) $P = 3x^4 + 4x^3 - x^2 - 14x + 8$
    f) $P = 6x^5 - 25x^4 + 12x^3 + 13x^2 - 4x - 2$
    g) $P = 3x^5 - 13x^4 + 19x^3 - 17x^2 + 16x - 4$

9.12 Technologie série 6.2

1. Soit la fonction polynomiale f définie par $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$. Obtenir exactement et approximativement les zéros réels de la fonction f et tracer son graphique en suivant les étapes suivantes.

   Attention : *Chaque item devra correspondre à une zone de requêtes.*

   i) Taper `restart` pour ré-initialiser l'environnement.

   ```
   > restart;
   ```

   ii) Créer la fonction f à l'aide de l'opérateur "flèche".

   ```
   > f:=x->3*x^2-5*x-1;
   ```

   iii) Obtenir exactement les zéros de la fonction f à l'aide des macro-commandes `RootOf` et `allvalues`.

   ```
   > Racines:=allvalues(RootOf(f(x)=0));
   ```

   iv) L'évaluateur a trouvé deux racines réelles distinctes. Contrôler la seconde racine directement dans la fonction f pour montrer que cette valeur est bien un zéro de la fonction f.

   ```
   >  f (Racines[2])=f(Racines[2]);
   ```

   v) La simplification automatique n'a simplifié que partiellement le calcul demandé. Appliquer alors une simplification sur demande à l'aide de la macro-commande `radnormal`.

   ```
   >  f (Racines[2])=radnormal(f(Racines[2]));
   ```

   vi) Tracer le graphique de la fonction f pour des valeurs de x comprises entre les zéros. Les macro-commandes `min` et `max` vont permettre de pointer respectivement vers le minimum et le maximum des éléments de la séquence `Racines`.

   ```
   > plot([x,f(x),x=min(Racines)..max(Racines)],
           scaling=constrained,
           color=orange);
   ```

   vii) Tracer de nouveau le graphique de la fonction f mais en précisant, cette fois, l'intervalle `x=min(Racines)-1..max(Racines)+1);`

   ```
   > plot([x,f(x),x=min(Racines)-1..max(Racines)+1],
           scaling=constrained,
           color=orange,
           view=[min(Racines)-1..max(Racines)+1,
                 f(5/6)..f(max(Racines)+1)]);
   ```

   viii) Dans l'option `view` précédent, à quoi correspond la borne inférieure `f(5/6)` de l'axe des y ? Aussi, pourquoi avoir préciser la borne supérieure de l'axe des y par `f(max(Racines))+1 ?` Répondre à ces deux questions dans une même zone de texte.

   ix) Vérifier si les expressions `f(min(Racines)-1)` et `f(max(Racines)+1)` sont bien égales.

   ```
   > radnormal(f(min(Racines)-1));
     radnormal(f(max(Racines)+1));
   ```

   Pourquoi cela devrait-il en être ainsi ? En fait, Dans une zone de texte, expliquer pourquoi et à quelle(s) condition(s), nous avons que, pour une fonction polynomiale f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$,

   $\forall\, t \in \mathbb{R}$ `f(min(Racines)-t)=f(max(Racines)+t)`

   x) Obtenir maintenant des approximations des racines à l'aide de la macro-commande `evalf`.

   ```
   > Racines_Approx:=evalf(Racines);
   ```

   xi) Nous allons de nouveau tracer le graphique de la fonction f sans utiliser les macro-commandes `min` et `max`. Vous allez d'abord ordonner les racines de façon croissantes à l'aide de la macro-commande `sort`. L'argument de `sort` devant être une **liste de valeurs décimales**, flanquer alors de part et d'autre `Racines_Approx` de crochets.

   ```
   > Zéros_Approx:=sort([Racines_Approx]);
   ```

   xii) Tracer de nouveau le graphique de la fonction f comme suit :

```
> plot([x,f(x),x=Zéros_Approx[1]-1..Zéros_Approx[2]+1],
       scaling=constrained,
       color=orange,
       view=[Zéros_Approx[1]-0.25..Zéros_Approx[2]+0.25,
             f(5/6)..f(Zéros_Approx[2]+0.25)]);
```

2. Soit la fonction polynomiale g définie par $g(x) = -3x^2 - x - 1$. Obtenir exactement les zéros imaginaires de la fonction g et tracer son graphique en suivant les étapes suivantes.

   Attention : *Chaque item devra correspondre à une zone de requêtes.*

   i) Créer la fonction g à l'aide de l'opérateur "flèche".

   ```
   > g:=x->-3*x^2-x-1;
   ```

   ii) Obtenir seulement les zéros réels de la fonction g en utilisant l'astuce `x<infinity` avec la macro-commande `solve`. Préciser, en option, la variable x entre accolades car il est prévu de faire une vérification avec la macro-commande `eval` au lieu de faire une évaluation dans la fonction g.

   ```
   > Racines:=solve({g(x)=0,x<infinity},{x});
   ```

   iii) L'évaluateur n'a trouvé aucune racine réelle. Résoudre de nouveau sans utiliser l'astuce `x<infinity`.

   ```
   > Racines:=solve(g(x)=0,{x});
   ```

   iv) L'évaluateur a trouvé deux racines imaginaires. Contrôler la première racine imaginaire avec la macro-commande `eval`.

   ```
   >  g (rhs(Racines[1][1]))=eval(g(x),Racines[1]);
   ```

   v) La simplification automatique n'a simplifié que partiellement cette racine. Appliquer alors une simplification sur demande avec la macro-commande `radnormal`.

   ```
   >  g (rhs(Racines[1][1]))=radnormal(eval(g(x),Racines[1]));
   ```

   vi) Puisque la fonction g ne possède pas de zéros réels (En êtes-vous certain ? Pourquoi ?), il n'est pas possible de tracer le graphique de la fonction g pour des valeurs de x comprises entre les zéros. Dans ce cas, faites un premier graphique en traçant la fonction g sur l'intervalle $[-10, 10]$.

   ```
   > plot([x,g(x),x=-10..10],color=navy);
   ```

   vii) Il aurait été plus astucieux, pour le tracé de la fonction g, d'exploiter les caractéristiques de la parabole. Les caractéristiques utiles de la parabole sont l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet. Tracer de nouveau le graphique de la fonction g autour de l'axe de symétrie $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{6}$ de cette parabole. Prendre un intervalle correspondant à deux unités de par et d'autre de cet axe de symétrie. Avec l'option `view`, limiter l'axe des y à l'intervalle $[g(\frac{-1}{6}) - 2, g(\frac{-1}{6}) + 3]$ (choix arbitraire).

   ```
   > plot([x,g(x),x=-1/6-2..-1/6+2],color=navy,
          view=[-1/6-2..-1/6+2,g(-1/6)-2..g(-1/6)+3]);
   ```

   Ce second graphique de la fonction g présente-t-il plus clairement l'absence de zéros réels ?

3. Soit la fonction polynomiale f définie par $f(x) = -x^3 - 6x^2 - x + 23$. Obtenir exactement et approximativement, si possible, les zéros réels de la fonction f et tracer son graphique en suivant les étapes suivantes.

   Attention : *Chaque item devra correspondre à une zone de requêtes.*

   i) Créer la fonction f à l'aide de l'opérateur "flèche".

   ```
   > f:=x->-x^3-6*x^2-x+23;
   ```

   ii) Obtenir seulement les zéros réels de la fonction en utilisant l'astuce `x<infinity` avec la macro-commande `solve`. Préciser, en option, la variable x entre accolades car il est prévu de faire une vérification avec la macro-commande `eval`.

   ```
   > Racines:=solve({f(x)=0,x<infinity},{x});
   ```

   iii) Obtenir autrement les racines réelles en spécifiant la résolution dans le domaine réel. Est-ce cela donne de meilleurs résultats ? Répondre dans une zone de texte immdiatement après la requête suivante.

   ```
   > use RealDomain in solve({f(x)=0,x<infinity},{x}) end;
   ```

iv) Vérifier si les éléments de `Racines` présente des approximations réelles des trois racines. Tracer le graphique de la fonction f sur un intervalle contenant ces trois zéros réels. Considérer donc l'intervalle $[-6, 3]$. Limiter l'axe des y à l'intervalle $[-20, 30]$.

```
> plot([x,f(x),x=-6..3],
        color=khaki,
        view=[-6..3,-20..30]);
```

v) Obtenir les expressions exactes de ces trois racines réelles avec les macro-commande `RootOf` et `allvalues`. (Cela devrait-il être toujours possible ? Discuter votre réponse avec votre professeur.

```
> Racines:=allvalues(RootOf(f(x)=0));
```

vi) Chacune des trois racines que l'évaluateur a trouvées s'exprime avec la quantité imaginaire I. Afficher donc la première valeurs de la séquence `Racines`.

```
> Racines[1];
```

vii) Pour expliquer ce semblant de contradiction entre le graphique de la fonction f, montrant clairement l'existence de trois zéros réels, et le fait que leur expression exacte semble montrer plutôt l'existence de trois zéros complexes, vous allez simplifier l'écriture de la première racine avec la macro-commande `evalc`. Cette macro-commande permet d'exprimer un nombre complexe dans sa forme rectangulaire $a+bi$.

```
> evalc(Racines[1]);
```

viii) Appliquer maintenant une simplification sur demande avec la macro-commande `radnormal`.

```
> radnormal(evalc(Racines[1]));
```

ix) L'expression simplifiée que vous avez obtenue montre, encore une fois, qu'un calcul avec les nombres complexes peut donner un nombre réel. Obtenir maintenant une approximation de ce nombre.

```
> evalf(radnormal(evalc(Racines[1])));
```

x) Afficher la formulation exacte de la deuxième racine. Comparer la simplification de cette racine simplifiée en premier avec `simplify/radical` et ensuite avec `radnormal`. Que remarquez-vous ? Répondre dans une zone de texte immédiatement après les requêtes suivantes.

```
> Racines[2];
  simplify(evalc(Racines[2]),radical);
  radnormal(evalc(Racines[2]));
```

xi) En résumé, pour obtenir des approximations des trois racines réelles, imbriquer la macro-commande `solve` dans la macro-commande `evalc`. Puis, appliquer une simplification sur cette composition avec la macro-commande `radnormal`. Enfin, obtenir des approximations de ces trois zéros avec `evalf`.

```
> Zéros:=evalf( radnormal( evalc( [solve(f(x)=0,x)] ) ) );
```

xii) Contrôler si ce sont bien des approximations des trois zéros réels de la fonction polynomiale f définie par $\mathrm{f}(x) = -x^3 - 6x^2 - x + 23$.

```
> Contrôle:=seq( eval(f(x),x=V),V=Zéros);
```

Les réponses sont-elles exactement égales à 0 ?

xiii) La variable d'environnement `Digits` est affecté de la valeur 10 par défaut. Augmenter la précision des approximations en affectant une autre valeur à la variable `Digits`, par exemple 30. Ensuite, obtenir de nouvelles approximations des zéros de la fonction f.

```
> Digits:=30:
  Zéros:=evalf( radnormal( evalc( [solve(f(x)=0)] ) ) );
  Contrôle:=seq( eval(f(x),x=V),V=Zéros);
```

xiv) Redonner à la variable `Digits` sa valeur par défaut.

```
> Digits:=10;
```

Les réponses sont-elles, cette fois, exactement égales à 0 ?

xv) Terminer ce numéro en contrôlant les valeurs exactes des racines dans la fonction f.

```
> Contrôle:=seq( radnormal(f(V)),V=Racines );
```

Y a-t-il avantage à faire des développements mathémariques avec des valeurs exactes plutôt qu'avec des approximations de ces valeurs exactes ? Répondre dans une zone de texte.

Attention : Pour les numéros 4, 5 et 6, il n'est pas permis d'utiliser la macro-commande `fsolve` afin de déterminer les zéros demandés. Il s'agit d'obtenir des approximations à l'aide des macro-commandes `RootOf`, `allvalues` et `evalf`.

4. Soit la fonction polynomiale f définie par $\mathrm{f}(x) = 2x^4 + 4x^3 + 1$. Créer la fonction f et tracer son graphique sur l'intervalle $[-5, 5]$. Combien de zéros réels observez-vous ?

   Suggestion : Que dire d'un "zoom" sur une région pertinente ? Effectuer donc un tel "zoom" en effectuant un second tracé sur un intervalle approprié et utiliser l'option `view`.

   Donner, si possible, une approximation avec 15 chiffres de chaque zéro réel de la fonction f.

5. Soit la fonction polynomiale f définie par $\mathrm{f}(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$. Créer la fonction f et tracer son graphique sur l'intervalle $[-3, 3]$. Combien de zéros réels observez-vous ?

   Suggestion : Que dire d'un "zoom" sur une région pertinente ? Effectue donc un tel "zoom" en effectuant un second tracé sur le même intervalle mais en précisant l'option `view=[-3..3,-1..10]`.

   Donner, si possible, une approximation avec 20 chiffres de chaque zéro réel de la fonction f.

6. Soit la fonction polynomiale f définie par $\mathrm{f}(x) = x^6 + 5x^5 - 3x^3 + 2x - 1$. Créer la fonction f et tracer son graphique sur l'intervalle $[-6, 6]$. Combien de zéros réels observez-vous ?

   Suggestion : Que dire d'un zoom sur une région pertinente ? Effectuer donc un tel "zoom" en effectuant un second tracé sur un intervalle approprié. Cette fois-ci, il vous sera nécessaire de créer deux "zooms" pertinents pour observer le nombre de zéros réels ainsi qu'un tracé continu de la fonction.

   Donner, si possible, une approximation avec 10 chiffres de chaque zéro réel de la fonction f.

7. Trouver, exactement et approximativement, les coordonnées des points d'intersection des fonctions f et g définies respectivement par

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3}{2}x + 20 \text{ et } \mathrm{g}(x) = 2x^2 + 5x + 7$$

   et tracer le graphique de ces courbes exclusivement sur l'intervalle entre les points d'intersection.

   Attention : *Chaque item devra correspondre à une zone de requêtes.*

   i) Créer les fonctions f et g à l'aide de l'opérateur "flèche".

```
> f:=x->3/2*x+20;
  g:=x->2*x^2+5*x+7;
```

   ii) Superposer les tracés des fonctions f et g sans utiliser la macro-commande `display` de l'extension `plots`. Donner la couleur `navy` à la droite et la couleur `orange` à la parabole. Prendre l'intervalle $[-5, 4]$ pour les deux tracés.

```
> plot([[x,f(x),x=-5..4],[x,g(x),x=-5..4]],
        color=[navy,orange]);
```

   iii) À l'aide des macro-commandes `RootOf` et `allvalues`, obtenir les valeurs exactes des racines de l'équation

$$\frac{3}{2}x + 20 = 2x^2 + 5x + 7$$

   Donner d'abord le nom original `Équation` à l'équation qu'il faut résoudre.

```
> Équation:=f(x)=g(x);
  Racines:=allvalues(RootOf(Équation));
```

   iv) L'évaluateur a trouvé les valeurs exactes des deux racines réelles distinctes. Contrôler les deux racines dans l'équation à résoudre.

```
> radnormal(eval(Équation,x=Racines[1]));
  radnormal(eval(Équation,x=Racines[2]));
```

   v) Les coordonnées exactes des points d'intersection sont donc :

```
> Points_1:=[Racines[1],f(Racines[1])];
  Points_2:=[Racines[2],f(Racines[2])];
```

vi) Les coordonnées approximatives des points d'intersection sont donc :

```
> Points_1_approx:=evalf(Points_1);
  Points_2_approx:=evalf(Points_2);
```

vii) Reste à superposer la droite et la parabole sur l'intervalle fermé limité par les racines de l'équation f(x)=g(x). Il faut d'abord ordonner les racines.

```
> Bornes:=sort([evalf(Racines)]):
  plot([ [x,f(x),x=Bornes[1]..Bornes[2]],
         [x,g(x),x=Bornes[1]..Bornes[2]] ],
         color=[navy,orange]);
```

Voilà !