

Fractions continues — Une approche historique

La démonstration de Fourier est limpide et est formulée avec rigueur comme l'exige toute démonstration mathématique. Mais, est-ce qu'Euler, avant Fourier, aurait déjà donné une preuve de l'irrationalité de e ? La réponse est oui. Mais la preuve d'Euler est très différente... et beaucoup moins limpide que celle de Fourier. Plusieurs mathématiciens contemporains et plusieurs sites Internet affirment qu'Euler a été le premier à démontrer l'irrationalité du nombre e mais, dans tous les cas, jamais on a donné une démonstration produite par Euler afin d'appuyer cette affirmation. Le site MacTutor, quant à lui, n'est pas aussi catégorique dans cette reconnaissance : « *Most people accept Euler as the first to prove that e is irrational* » (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e/>). Or, nous allons le montrer plus loin, Euler a été le premier à obtenir un développement du nombre e en fraction continue infinie. Il a donc démontré, de facto, que ce nombre est irrationnel. Mais pour Euler, la démonstration de l'irrationalité du nombre e n'a jamais été une fin en soi et il n'a jamais formulé explicitement que e est un nombre irrationnel.



FIG. 24 – Leonhard Euler (1707 – 1783)
Portrait par Jakob Emanuel Handmann en 1753 (Kunstmuseum Basel)

Pour être en mesure de saisir la manière dont Euler s'y est pris pour le prouver, nous allons d'abord prendre connaissance de ce qu'est un développement en *fraction continue* (simple et généralisée) d'un nombre ainsi que de quelques résultats élémentaires auxquels Euler est arrivé.

Avec trois publications remarquables, Euler a été le premier à formuler une approche théorique rigoureuse sur les propriétés élémentaires des fractions continues :

- *De fractionibus continuis dissertatio* [36] (Publiée en 1744 mais écrit en 1737)
- *De fractionibus continuis observationes* [38] (Publiée en 1750 mais écrit en 1739)
- *Introductio in analysin infinitorum, Tomus Primus* [37] (Publiée en 1748 mais écrite en 1745)

Dans son « *Introductio in analysin infinitorum, Tomus Primus* » Euler aborde longuement l'addition d'un nombre infini de termes ainsi que la multiplication d'un nombre infini de facteurs. À la fin du premier tome, Euler ressent la nécessité d'introduire un autre type d'objet mathématique faisant intervenir l'infini. Ses travaux parallèles et antérieurs sur ces objets l'ont convaincu que ces objets pourront apporter une contribution certaine à l'analyse mathématique. Au dernier chapitre de ce tome, Euler juge donc pertinent de présenter quelques résultats découlant de ces objets mathématiques. Notons que les résultats qu'Euler présentent dans ce tome sont des résultats repris succinctement de ses deux autres publications antérieures.

Après avoir traité assez au long dans les Chapitres précédents des séries infinies, & des produits composés de facteurs infinis, il convient de dire un mot d'une troisieme espece de formules infinies que donnent les divisions ou fractions continues. Car quoique cette partie ait été peu cultivée jufqu'à présent je ne doute pas que l'usage n'en devienne très-grand dans l'analyse infinitéfinale. Quelques effais que j'en ai faits m'autorifent à le croire. Cette théorie ne laiffera pas d'être particulièrement d'un assez grand fecours pour l'Arithmétique & l'Algebre ordinaire c'est ce que je me propofe d'exposer & d'expliquer en peu de mots dans ce Chapitre.

L. Euler — *Introductio in analysin infinitorum, Tomus Primus, Chapitre XVIII, §356 (1748)*

À l'article §357 du chapitre XVIII (dernier chapitre de son *Introductio*), soit à la page 296 de la version latine, Euler définit ce qu'est une fraction continue :

« J'appelle *fraction continue* une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier et une fraction formée de la même manière que les précédentes, ainsi de suite, soit qu'il y ait un nombre infini de fractions, soit qu'il y ait un nombre fini.

Telles sont les expressions suivantes :

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \dots}}}}} \quad \text{ou} \quad a + \frac{\alpha}{b + \frac{\epsilon}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \dots}}}}}$$

Dans la première, les numérateurs de toutes fractions sont l'unité ; c'est celle que nous considérerons principalement, et dans la seconde, les numérateurs sont des nombres quelconques. »

L. Euler — *De fractionibus continuis dissertatio*, Chapitre XVIII, p.277 (1748)

Lorsque Euler spécifie dénominateur entier, il faut comprendre qu'il s'agit d'un nombre entier strictement positif et lorsqu'il spécifie que les numérateurs sont des nombres quelconques, il faut comprendre qu'il s'agit de nombres entiers quelconques strictement positifs. En mathématique, la première expression est appelée *fraction continue simple*, la seconde est appelée *fraction continue généralisée*. Pour celle-ci, notons l'usage de l'alphabet grec pour les numérateurs partiels et l'alphabet latin pour les dénominateurs partiels.

Déjà usitées chez les mathématiciens indiens au Moyen Âge, les fractions continues sont étudiées en Europe dès le XVI^e siècle. À l'exception de quelques résultats isolés au XVI^e et XVII^e siècles (Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), William Brouncker (1620-1684) et John Wallis) (1616-1703)), la majeure partie de la théorie élémentaire des fractions continues a été développée par Leonhard Euler « *De fractionibus continuis dissertatio* » (*Mémoire sur les fractions continues*, article écrit en 1737 mais publié en 1748). L'expression « continued fraction » apparaît la première fois en 1653 dans le livre *Arithmetica infinitorum* de John Wallis.

Notons la légère différence dans la notation employée par Euler dans son « *De fractionibus continuis dissertatio* » avec celle utilisée dans son « *Introductio in analyfin infinitorum, Tomus Primus* ». Le trait horizontal tracé ici est plus long mais cela ne change pas évidemment la nature de ces objets.

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \text{etc.}}}}}} \quad \text{ou} \quad a + \frac{\alpha}{b + \frac{\epsilon}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \text{etc.}}}}}}$$

Méthodes de Rafael Bombelli

Dans notre parcours historique sur les fractions continues, soulignons d'abord le travail de Bombelli (Rafael Bombelli 1526 – 1572). Dans les années 1550, Bombelli était employé au drainage des lacs et marais de la vallée de Chiana (entre Sienne et Arezzo) mais il se tourne vers l'étude de l'algèbre lorsque

le projet de drainage fut temporairement suspendu après 1555, et écrivit sa propre Algèbre, en italien, entre 1557 et 1560. Elle se composait de cinq livres, dont les Livres I à III qui furent publiés en 1572, l'année de sa mort : *L'algebra parte maggiore dell'arimetica divisa in tre libri*. Les livres IV et V, qui explorent la relation entre l'algèbre et la géométrie, sont restés inédits jusqu'en 1923. Les trois premiers livres ont connu une réédition en 1579, toujours à Bologne : *L'algebra : opera di Rafael Bombelli da Bologna, divisa in tre libri : con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Aritmetica : con una tavola copiosa delle materie, che in essa si contengono* (Algèbre : un ouvrage de Rafael Bombelli de Bologne, divisé en trois livres : avec lequel chacun parviendra à une parfaite connaissance de la théorie de l'arithmétique : avec un tableau copieux des sujets qui y sont contenus).

L'algebra est un véritable manuel d'algèbre où Bombelli innove avec plusieurs notations algébriques qui vont largement au-delà de la simple abréviation. Par exemple, il a été le premier à utiliser des parenthèses pour isoler clairement la portée de sa notation racine.

L'ALGEBRA

PARTE MAGGIORE

DELL'ARITMETICA

DIVISA IN TRE LIBRI

DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.

Nouamente posta in luce.



IN BOLOGNA

Nella stamperia di Giovanni Rossi

M D L X X I I.

Con Licentia delli RR. VV. del Vefc. & Inquisitr.

Fig. 25 – *L'algebra* de Rafael Bombelli – 1572

Écriture moderne	Écriture manu scriptus de Bombelli	Écriture typographique de Bombelli
$x^3 + 6x^2 - 3x$	$\overset{3}{1} p. \overset{2}{6} m. \overset{1}{3}$	$\overset{3}{1} p. \overset{2}{6} m. \overset{1}{3}$
$x^3 = 32x + 24$	$\overset{3}{1} a \overset{1}{32} p. \overset{0}{24}$	$\overset{3}{1}$ Eguale à $\overset{1}{32} p. \overset{0}{24}$
$\sqrt{4 + \sqrt{6}}$	$\mathbb{R}[4p. \mathbb{R}6]$	R.q. [4.p.R.q.6]
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}}$	$\mathbb{R}^3[2p. \mathbb{R}[0 m. 121]]$	R.c. [2.p.R.q. [0.m.121]]

Tab. 4 – Notation assez sophistiquée de Bombelli

Au tout début de son *Libro Primo* (p.30), Bombelli décrit longuement la manière de s'y prendre pour extraire *manu scriptus* les racines carrées : *Modo di trouare il lato quadrato di qual si uoglia numero* (Façon de trouver le côté carré d'un nombre quelconque). Bombelli donne deux exemples très détaillés devant permettre au lecteur de bien saisir la démarche calculatoire proposée. Chaque exemple tient lieu de théorie. Ensuite, c'est ici qu'il innove, il propose une méthode itérative de calculs (désignation comme telle aujourd'hui de son procédé) s'approchant de plus en plus de la racine carrée à trouver.

Note historique

« Précisons que nous sommes au milieu de XVI^e siècle et que l'usage des fractions décimales n'est pas encore répandu. Pour le commerce, les fractions ordinaires et leur notation semblent avoir été suffisantes au Moyen Âge et encore à la Renaissance. Les fractions impliquées n'étaient jamais très compliquées, numérateur et dénominateur à trois chiffres au maximum.

La règle de division de Regiomontanus (1436-1476) est une règle pour diviser les nombres de la forme $a \times 10^n$. C'est en donnant des exemples de cette règle que Pellos, en 1492, utilise un point pour séparer la partie décimale de la partie entière. Mais ce n'est pour lui qu'un artifice qui n'aura pas de suite. D'ailleurs, les réponses ne sont pas données sous une forme de fractions décimales.

Bien que les fractions décimales aient déjà été inventées par les Arabes et les Chinois antérieurement, leur introduction en "Europe" est tardive. Quelques mathématiciens dont Christoff Rudolff (1499–1445) dans son *Exempel-Büchlin* de 1530 traite de fractions décimales en utilisant une barre pour séparer les parties entière et fractionnaire. Mais son travail n'est pas très apprécié et l'usage des fractions décimales reste très marginal. »[12]

Viennent ensuite les efforts du flamand Simon Stevin (1548–1620), dans son œuvre *De Thiende* publié en 1585 et, dans la même année, le traduit en français sous le titre *La Disme*. *La Disme* introduit une nouvelle notation pour les nombres en privilégiant un positionnement (sans le point décimal) dans le nombre pour la partie décimale (dixième, centième, millièm, etc.) afin d'éviter de manipuler les fractions (nombres rompus) elles-mêmes. La volonté de Stevin est de « décimaliser » les différents systèmes de mesure et ce, jusqu'aux unités monétaires. [18]. *La Disme* est un énorme succès et en une dizaine d'années, l'usage des nombres décimaux dans les calculs se répandit. Certains auteurs attribuent le premier usage véritable du "point" décimal à Joost Bürgi (1552–1632) : son point décimal est en fait un petit cercle qui surmontait la position des unités. Aussi, le point comme séparateur a été également employé par Bartholomäus Pitiscus (1561–1613) dans les tables annexées à sa troisième édition, publiée en 1612, de son *Trigonometriæ five de dimensione triangulorum libri quinque* mais, « ... un examen rapide de ces tables montre qu'ils contiennent effectivement des points, mais ces points séparent des groupes de chiffres, et si certains d'entre eux séparent la décimale en partie, on ne peut bien sûr pas leur attribuer cette seule signification. » [79]

C'est assurément au XVII^e siècle que le point décimal se répandit. Dans le *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (1619) de John Napier, nous pouvons lire au tout début, soit à la proposition 5, la règle claire de l'utilisation du point décimal :

In numeris periodo sic in se distinctis, quicquid post periodum notatur fractio est, cujus denominator est unitas cum tot cyphris post se, quot sunt figuræ post periodum.

Vt 10000000.04 valet idem, quod 10000000 $\frac{4}{100}$. Item 25.803, idem quod 25 $\frac{803}{1000}$. Item 9999998.0005021, idem valet quod 9999998 $\frac{5021}{10000000}$, & sic de cæteris.

Voici le premier exemple donné par Bombelli (Voir FIG. 27). Soit l'extraction de la racine carrée de 5 678 : *Modo di trouare il lato quadrato di qual si uogha numero.* ; *Méthode pour trouver le côté carré de n'importe quel nombre.* (Livre I, p. 30).

Soit l'extraction de la racine carrée de 5 678. [7]

Se si hauerà à trouare il lato (come farebbe di 5678) facciafi come si uede qui da canto, Tirifi la linea .a. tanto lontana, che sotto il numero ci capisca un altro ordine di carratteti, e sopra l'8 si faccia un punto, e poi uenendo à man sinistra, lassando un carrattero nel mezo, e sopra il 6, si faccia un altro punto, e se il numero fosse maggiore : si seguitarà di fare li punti; mà interponendo un punto da un carrattero all'altro, e fatto questo : si ricomencia dall'altro capo à man sinistra andando uerso la destra, e si pigliano gli carratteri, che sono fino al primo punto, e si pongono sotto la linea .a., il qual'è 56. Fatto questo, si troua un numero quadrato, e il più prossimo; mà che non sia maggiore di 56, il quale farà 49, che il suo lato è 7, il qual 7. si mette sotto il 6, sopra la linea .a., sopra del quale è il primo punto, e dui altri 7. si pongono da canto, sotto li quali si tira la linea e. poi si somma, che fanno 14, & il prodotto delli detti dui 7 l'uno nell'altro è 49, il quale si mette sotto il 56, e si tira la linea .b. e, si caua di 56 resta 7, & è finito

142 LA PRATIQUE
SECONDE PARTIE
DE LA DISME
DE L'OPERATION,
PROPOSITION I, DE
L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à aiouster : Trouuer leur Somme.

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27③8①4③7③, le deuxième 37③8①7③5③, le troisième 875⑦7①8③1③.

Explication du requis. Il nous faut trouuer leur Somme. Construction. ③ ① ③ ③
On mettera les nombres donnez 2 7 8 4 7
en ordre comme ci ioignant, les 3 7 6 7 5
aioustant selon la vulgaire maniere 8 7 5 7 8 2
d'ajouster nombres entiers, en cette 9 4 1 3 0 4
forte:

Donne Somme (par le 1^{er} probleme de l'Arithmetique) 941304, qui font (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941③; ①③③4③. Je di que les mesmes font la Somme requise. Demonstration. Les 27③8①4③7③ donnez, font (par la 3^e definition) 27 $\frac{8}{100}$, 7 $\frac{8}{1000}$, ensemble 27 $\frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37③8①7③5③ valent 37 $\frac{675}{1000}$, & les 875⑦7①8③1③ feront 875 $\frac{7821}{10000}$, lesquels trois nombres comme 27 $\frac{847}{1000}$, 37 $\frac{675}{1000}$, 875 $\frac{7821}{10000}$, font ensemble (par le 1^{er} probleme de l'Arith.) 941 $\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941③; ①③③4③, c'est

FIG. 26 – *La Disme de Simon Stevin – Édition de 1585*

fino al primo punto; E per seguire auanti; se gli aggiunge il 7, ch'è sopra la linea a. fra il 6, e l'8, e farà 77.

Hora si uede quante uolte entra il 14, ch'è sotto la linea e. nel 77; che ui entra 5; il qual 5 si mette al pari del 14, e dirà 145, & un altro 5 si mette sotto quello, e si fommano (tirando la linea f) e fà 150, & il medesimo 5 si mette sotto l'8; sopra il qual' è l'altro punto, e l'8 si mette sotto la linea b. al pari del 77, e fà 778; sotto il quale se gli mette il prodotto di 145 nel 5, che ui è sotto, ch'è 725, e si caua l'uno dell'altro (tirando la linea .c.) e resta .53, sotto il quale si tira la virgula .d, e se li mette sotto il 150, ch' è sotto la linea .f. che dirà $\frac{53}{150}$, & è finita la estrattione, ouer il lato proffimo di 5678, che farà 75, e $\frac{53}{150}$ che solo faranno differenti tanto, quanto è il quadrato del rotto, cioè $\frac{2809}{22500}$; mà uolendo fare, che si fia minor differentia, ne darò la fus regola di sotto, e ancora per piu chiarezze, ne porrò un'altro effempio fimile à questo, auanti si uenghi à detta regola.

L'algebra parte maggiore dell'arimetica divisa in tre libri (1572), Libro Primo
Modo di trouare il lato quadrato di qual si uoglia numero (p.30)

« Si l'on veut trouver le côté (comme ce serait le cas pour 5678), il faut procéder comme on le voit ici sur le côté : tracer la ligne .a. suffisamment loin pour qu'un autre ordre de caractères puisse être compris sous le nombre, et placer un point au-dessus du 8, puis, en allant vers la gauche, en laissant un caractère au milieu, placer un autre point au-dessus du 6; si le nombre est plus grand, on continuera à placer des points, mais en intercalant un point entre un caractère et l'autre; après avoir fait cela, on recommence de l'autre côté, à gauche, en allant vers la droite, et on prend les caractères qui se trouvent jusqu'au premier point, et on les place sous la ligne .a., qui est 56. Cela fait, on trouve un nombre carré, et le plus proche; mais qui ne soit pas supérieur à 56, lequel sera 49, dont le côté est 7; on place ce 7 sous le 6, au-dessus de la ligne .a, au-dessus de laquelle se trouve le premier point, et on place deux autres 7 sur le côté, sous lesquels on trace la ligne .e; puis on additionne, ce qui donne 14, & le produit desdits deux 7 l'un dans l'autre est 49, lequel on place sous le 56, et on trace la ligne .b; et, en soustrayant 56, il reste 7, & on a terminé jusqu'au premier point; et pour continuer; si on y ajoute le 7, qui se trouve au-dessus de la ligne .a, entre le 6 et le 8, on obtient 77.

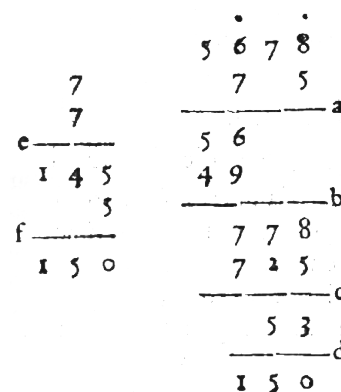


Fig. 27 – Libro Primo p.31 –
Extraction de R.q. 5678

Maintenant, on voit combien de fois le 14, qui se trouve sous la ligne e., entre dans le 77; il y entre 5 fois; on place ce 5 à côté du 14, ce qui donne 145, & on place un autre 5 sous celui-ci, et on les additionne (en traçant la ligne f.), ce qui donne 150, & on place le même 5 sous le 8; au-dessus duquel se trouve l'autre point, et on place le 8 sous la ligne b., à côté du 77, ce qui donne 778; sous lequel on place le produit de 145 par 5, qui se trouve en dessous, ce qui donne 725, et on soustrait l'un de l'autre (en traçant la ligne .c.), ce qui donne 0,53, sous lequel on trace la virgule .d., et on les place sous le 150, qui se trouve sous la ligne .f., ce qui donne $\frac{53}{150}$; & l'extraction est terminée, c'est-à-dire le côté le plus proche de 5678, qui donne 75, et $\frac{53}{150}$; ces deux nombres ne diffèrent que du carré du reste, c'est-à-dire $\frac{2809}{22500}$; mais, pour obtenir une différence plus petite, je donnerai la règle ci-dessous, et pour plus de clarté, je présenterai un autre exemple similaire à celui-ci, en suivant ladite règle. » [49]

Comme on le voit ici, la « division » s'arrête avec le « reste » 53 puisque l'on ne peut plus continuer : il n'y a plus de tranches de deux chiffres à abaisser. La réponse donnée par Bombelli est analogue à celle de la division euclidienne : le résultat étant un « quotient » égale à 75 plus une « division » à poursuivre, soit $\frac{53}{150}$. Bombelli conclut que la valeur approchée de la racine carrée de 5678 est $75 \frac{53}{150}$ dont le carré $(75 \frac{53}{150})^2$ donne $\frac{127757809}{22500}$, laquelle "racine approchée" dépasse 5678 de $\frac{2809}{22500}$.

Avant que Bombelli ne présente sa règle pour le calcul de meilleures valeurs approchées d'une racine carrée, Bombelli présente un second exemple (Voir FIG. 28). Soit l'extraction de la racine carrée de 5 267 890 134 :

Soit l'extraction de la racine carrée de 5 267 890 134. [8]

Habbiafi à pigliar il lato di .5267890134. faccianfi li punti (come fu infegnato nella passata.) il primo sopra il 4, il secondo sopra al .1, il terzo sopra il 9, il quarto sopra il 7, e il quinto sopra il 2, poi si tiri la linea b; fotto alla quale si mette il 52, ch'è il numero, il quale gionge fino al primo punto, cominciando à man sinistra, e andā do uerso la destra, e poi si cerchi un numero quadrato il piu proffimo, che sia al 52, mà che non sia maggiore, il quale farà 49, e si mette sotto al 52, e si tira la linea .e e si caua l'uno dell'altro, e resta 3. & il lato del 49, ch'è 7. si mette da parte, e sotto se gli ne mette un'altro. e si tira la linea .a. e si fommano, e fanno 14, e un'altro 7 si mette sotto il 2, sopra il quale è il primo punto

*L'algebra parte maggiore dell'arimetica divisa in tre libri (1572), Libro Primo
Modo di trouare il lato quadrato di qual si uoglia numero (p.32)*

« Ayant à prendre le côté de .5267890134. on met les points (comme il a été enseigné précédemment), le premier sur le 4, le second sur le 1, le troisième sur le 9, le quatrième sur le 7 et le cinquième sur le 2 et ensuite on trace le trait .b.. En dessous se met le 52 qui est le nombre qui va jusqu'au premier point en commençant à main gauche et en allant vers la droite.

Ensuite, on cherche le carré le plus proche de 52, mais qui ne lui soit pas supérieur, ce sera 49. Il se met sous le 52, on trace le trait .c. et on retranche l'un de l'autre, il reste 3. Le côté de 49, qui est 7, se met de côté et en dessous de lui on en met un autre. On trace le trait .a., ils se somment et font 14. Un autre 7 se met sous le 2 sur lequel est le premier point et, au 3 qui est sous le trait .c., on adjoint le 6 qui est entre le point du 2 et celui du 7, cela fait 36. Maintenant, on regarde combien de fois le 14 qui est sous le trait .a. va dans le 36 qui est sous la ligne .c., il y va 2 fois. Alors, à côté du 14 on met un 2, en dessous d'où le 2 se tient, on en mettra un autre et on trace le trait h.. Ils se sommeront et feront 144, un autre 2 se met sous le 7 sur lequel est le second point. Au 36 qui était sous le trait .c., on lui adjointra le 7 qui est sous le second point. Cela fera 367, sous lequel on mettra 284, produit de 242, qui est sous le trait .a., multiplié par 2 (qui lui est en dessous). Le retranchant il reste 83 et c'est fini pour le second point. Voulant aller plus loin, au 83 qui est en dessous du trait .d., on adjoint le 8 qui est celui qui suit le 7 du second point, cela fait 838. Maintenant on regarde combien de fois il y va 144 qui est sous le trait .h., il y va 5 fois. Alors, à côté du 144 on adjointra un 5, cela fera 1445 sous lequel on met un autre 5. En tirant dessous le trait .i., ils se somment et font 1450. Un autre 5 se met sous le 9 qui est sous le troisième point. Au 838, qui est sous le trait .d., on adjoint le 9 qui est sous le troisième point. Cela fait 8389 duquel on en retranche le produit de 1445, qui est sous le trait .h., par 5 qui lui est en dessous, c'est 7225, il reste 1164 qui est sous le trait .e., et c'est fini pour le troisième point. Voulant continuer encore, à 1164 on adjoint le 0 qui suit le 9 du troisième point et cela fait 11640. Alors, on regarde combien de fois il y va 1450 qui est sous le trait .i., il y va 8 fois. Alors, à côté de lui on met le 8, cela fait 14508 et en dessous de lui, on met un autre 8 et on tire le trait .l.. Ils se somment, cela fait 14516, et un autre 8 se met sous le 1 qui est sous le quatrième point. Au 11640, qui est sous le trait .e., on adjoint 1 qui est sous le quatrième point. Cela fait 116401 duquel on en retire le produit de 14508, qui est sous le trait .i., par 8, qui lui est en dessous, cela fait 116064, il reste 337 et c'est fini pour le quatrième point. Voulant aussi encore poursuivre, on lui adjoint 3, qui est celui qui suit le 1 sous le quatrième point et cela fait 3373. Alors, on a besoin de voir combien de fois il y va 14516, qui pour lui être supérieur n'y va pas. Alors, on lui mettra un 0 à côté, et cela donnera 145160, un autre 0 se mettra sous le 4 qui est sous le cinquième point et à 3373, on adjointra le dit 4 du cinquième point. Cela fait 33734 et pour que cela soit fini, on lui mettra en dessous 145160 qui est sous le trait .l.. En y plaçant entre l'un et l'autre la virgule .g.,

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 \text{a} \\
 \text{h} \\
 \text{i} \\
 \text{l}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 142 \\
 \hline
 1445 \\
 \hline
 14508 \\
 \hline
 145160
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{b} \\
 \text{c} \\
 \text{d} \\
 \text{e} \\
 \text{f} \\
 \text{g}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 5267890134 \\
 \hline
 72580 \\
 \hline
 52 \\
 \hline
 49 \\
 \hline
 367 \\
 \hline
 284 \\
 \hline
 8389 \\
 \hline
 7225 \\
 \hline
 116401 \\
 \hline
 116064 \\
 \hline
 33734 \\
 \hline
 145160
 \end{array}
 \end{array}$$

FIG. 28 – Libro Primo p.32 – Extraction de R.q. 5267890134

il se formera la fraction et le côté proche du nombre proposé sera $72580 \frac{33734}{145160}$. Voulant en faire la preuve (bien qu'elle ne soit pas réelle mais échouera de très rares fois) on procède dans l'ordre suivant. On fait la croix que l'on voit dans la figure, à son sommet on met le 2, nombre qui reste de la preuve par 9 de 33374. Puis, on fait la preuve par 9 de 72580, qui est le 4 qui se met dans l'angle .m. de la croix, un autre se met dans l'angle .n. et on les multiplie l'un par l'autre, cela fait 16. Ensuite, on ajoute le 2 qui est au sommet de la croix, cela fait 18 et sa preuve par 9 est 0 qui se met dans l'angle .p. de la croix. Puis on fait la preuve par 9 de 5267890134, qui est 0 qui se met dans l'angle .q. de la croix. et, l'angle .p. étant égal à l'angle .q., l'extraction peut être bonne. Mais, s'ils ne sont pas égaux, il est certain qu'elle est fausse.

Bien que tous les autres auteurs aient fait une telle extraction par la *galera* (galère) à moi il m'est paru néanmoins nécessaire de la faire par la *danda*, parce qu'on voit plus clairement que la *galera* ne le fait. Et bien qu'il soit plus intelligent et plus charmant d'utiliser la *galera* que la *danda*, à cause de la difficulté de son écriture, les caractères étant effacés, et que cela génère de la confusion chez celui qui ne sait pas, j'ai mis la *danda* plus par nécessité que par volonté. Maintenant, il me reste à dire (comme je l'ai promis) comment se forme la fraction, cela sera dans ce qui suit..... »[49]

Il y a deux algorithmes de la division par la *danda* : la *danda corta* et la *danda lunga*. La différence par rapport à la division *danda corta* est que les soustractions sont écrites plutôt que simplement effectuées mentalement. Comme nous pouvons le voir, Bombelli a appliqué l'algorithme de la division par la *danda lunga*. L'algorithme de la division par la *galera* est un algorithme qui, la plupart du temps, s'effectue en une multitude d'étapes. Par exemple, la division $878 \div 23$ par la *galera* est réalisée en dix étapes successives où, à chaque étape, il est requis de biffer les chiffres mais, à la fin, le seul n'ayant pas été biffé est le reste de la division. Lorsque la division est terminée, les ratures ressemblent, vues de haut, aux rames des galériens dans un navire. Pour l'exemple de $878 \div 23$ par la *galera* voir le lien < http://www.maecla.it/bibliotecaMatematica/af_file/DAMORE_OLIVA_numeri/DIVISIO.htm >

Avant l'usage généralisé de la calculatrice à l'école, savoir extraire *manu scriptus* la racine carrée d'un nombre faisait partie du cursus scolaire. Dans mon parcours académique, la méthode de la potence m'a été enseignée dès la première année du secondaire pour extraire la racine carrée d'un nombre. Cet algorithme doit son nom à la disposition des calculs qui ressemble à celle de la division. Savoir calculer *manu scriptus* la racine carrée avec l'algorithme de la potence aide assurément à mieux comprendre les deux exemples données par Bombelli même si la disposition utilisée par Bombelli n'est pas celle de la méthode de la potence. Tout comme la méthode de Bombelli, nous partageons en tranches de deux chiffres la partie entière à partir de la virgule et en allant vers la gauche puis, pour la partie décimale, nous partageons toujours en tranche de deux chiffres en allant de la virgule vers la droite. Si la dernière tranche de la partie décimale n'a qu'un chiffre, on la complète avec un zéro.

Bombelli ne trouvait que des racines carrées de nombres entiers avec des restes fractionnaires si le nombre n'était pas un carré parfait. Avec la connaissance des nombres décimaux (ce que Bombelli ne connaissait pas), la méthode de la potence permet d'obtenir des valeurs décimales approchées de la racine carrée d'un entier. C'est en poursuivant les calculs en abaissant une paire « 00 » autant de fois qu'on le veut tout en plaçant une virgule dans la racine dès le premier abaissement de la paire de « 00 ». On retrouve chez Isaac Newton (1642–1727), dans son *Arithmetica Universalis* publié en 1707 une disposition similaire à l'algorithme de la potence pour l'extraction de la racine carrée (c'est 135 ans après la publication de *L'Algebra*). Newton donne l'exemple pour l'extraction de la racine carrée d'un entier carré parfait, à la page 31 (99856) et un autre exemple à la page 32 (22178791) dont l'extraction de la racine carrée est donnée avec une valeur tronquée 4709,43637& (Voir FIG. 29).[68]

32 ALGEBRÆ	
Atque ita si radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctione quare numerum cuius quadratum, (siquidem id nequeat æquari) sit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies esse 4. Nam 5 X 5 five 25 major est quam 22, & 4 X 4 five 16 minor. Quare 4 erit prima figura radicit. Et hac ita	22178791 (4709,43637&c.
16	16
Quoto scripsit, de 22 aufer quadratum 4 X 4, seu 16, residuoque 6 ad- iunge desuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cuius divisione per duplum 4 elicienda est secunda figura radicit. Nempe 2	617 609 88791 84681
neglecta ultima figura 7, dic quoties 8 continetur in 617	4110.00 376736
Resp. 7. Quare scribe 7 in Quoto, & de 67 aufer facti 7 in 87 seu 609 & restabit 8, cui ad- iunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cuius divisione per duplum 47 seu 94 elicienda est tertia	60075100 56513196 356190408 282566169 73624231
figura. Ut pote dic quoties 94 continetur in 887	
Resp. 9. Quare scribe 9 in quoto, ad- iungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791 cuius divisione per duplum 470 seu 940 elicienda est ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in	8879

FIG. 29 – I. Newton–*Mathematica Universalis* (1707), p.32

La figure **FIG.30** montre l'application de la méthode de la potence pour extraire la racine de carrée de 5 267 890 134 (c'est le nombre du second exemple de Bombelli) avec reste en fraction ordinaire **FIG.30 (a)** et tronquée avec deux décimales **FIG.30 (b)**.

$$\begin{array}{r|l}
 5\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0\ 1\ 3\ 4 & \mathbf{7\ 2\ 5\ 8\ 0} \\
 -4\ 9 & 7 \times 7 \\
 \hline
 3\ 6\ 7 & \\
 -2\ 8\ 4 & 142 \times 2 \\
 \hline
 8\ 3\ 8\ 9 & \\
 -7\ 2\ 2\ 5 & 1445 \times 5 \\
 \hline
 1\ 1\ 6\ 4\ 0\ 1 & \\
 -1\ 1\ 6\ 0\ 6\ 4 & 14508 \times 8 \\
 \hline
 3\ 3\ 7\ 3\ 4 & \\
 -0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 145160 \times 0 \\
 \hline
 3\ 3\ 7\ 3\ 4 &
 \end{array}$$

(a) La racine carrée avec reste fractionnaire

$$\begin{array}{r|l}
 5\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0\ 1\ 3\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0 & \mathbf{7\ 2\ 5\ 8\ 0,23} \\
 -4\ 9 & 7 \times 7 \\
 \hline
 3\ 6\ 7 & \\
 -2\ 8\ 4 & 142 \times 2 \\
 \hline
 8\ 3\ 8\ 9 & \\
 -7\ 2\ 2\ 5 & 1445 \times 5 \\
 \hline
 1\ 1\ 6\ 4\ 0\ 1 & \\
 -1\ 1\ 6\ 0\ 6\ 4 & 14508 \times 8 \\
 \hline
 3\ 3\ 7\ 3\ 4 & \\
 -0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 145160 \times 0 \\
 \hline
 3\ 3\ 7\ 3\ 4\ 0\ 0 & \\
 -2\ 9\ 0\ 3\ 2\ 0\ 4 & 1451602 \times 2 \\
 \hline
 4\ 7\ 0\ 1\ 9\ 6\ 0\ 0 & \\
 -4\ 3\ 5\ 4\ 8\ 1\ 2\ 9 & 14516043 \times 3 \\
 \hline
 3\ 4\ 7\ 1\ 4\ 7\ 1 &
 \end{array}$$

(b) Racine carrée tronquée à deux décimales

FIG. 30 – Disposition manu scriptus pour l'extraction de la racine carrée

Dans ce qui suit, nous montrerons que le travail de Bombelli, pour approcher les racines carrées, n'a pas produit comme tel une ébauche sur les fractions continues. Bizarre, me direz-vous, de commencer un parcours historique sur les fractions continues en commençant par le travail de ce remarquable algébriste qui n'aurait pas apporté une contribution comme telle sur ce sujet. Après la description de deux de ses méthodes, nous verrons plus loin que son travail aura été inspirant pour ses successeurs.

La manière de Bombelli pour approcher les racines carrées est, pour l'époque, une très grande innovation algébrique. Bombelli expose d'abord une description rhétorique de sa règle (désignation utilisée par Bombelli lui-même) avec l'extraction de la racine carrée de 13. Voici donc la description que Bombelli donne lui-même de sa règle pour obtenir des approximations successives de la racine carrée de 13. 13 étant un nombre qui ne requiert pas un calcul élaboré d'extraction de racine carrée pour trouver que 3 est le plus grand entier dont le carré ne dépasse pas 13. Avec le nombre 13, Bombelli estime qu'il sera plus facile de suivre sa méthode.

Description de la règle par Bombelli lui-même. [49]

« Admettons d'abord que, si nous voulons trouver une racine approximative de 13, celle-ci sera 3 et le reste 4. Ce reste doit être divisé par 6 (le double du 3 donné avant) ce qui donne $2/3$. C'est la première fraction qui doit être ajoutée au 3, faisant $3\ 2/3$ qui est la racine approchée de 13. Comme le carré de ce nombre est $13\ 4/9$, c'est trop grand de $4/9$. Si quelqu'un veut une meilleure approximation, le 6, qui est le double du 3, doit être ajouté à la fraction $2/3$ donnant $6\ 2/3$. Avec ce nombre on doit diviser 4, qui est la différence entre 9 et 13. Le résultat est $3/5$ qui, ajouté à 3 fait $3\ 3/5$. C'est une meilleure approximation de la racine carrée de 13 parce que son carré est $12\ 24/25$, qui est plus proche que celui de $3\ 2/3$. Mais si je veux une meilleure approximation, j'ajoute cette fraction au 6, faisant $6\ 3/5$, divisant 4 par cela et obtenant $20/33$. Ceci doit être ajouté au 3 comme précédemment, faisant $3\ 20/33$. C'est une meilleure approximation parce que son carré est $13\ 4/1089$ qui est trop grand de $4/1089$. »

*L'algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri,
Libro Primo, pp.35 et 36 (1572)*

En fait, sa règle repose sur un calcul itératif que Bombelli a déduit par la résolution d'une équation à une inconnue. La description que fait Bombelli de sa méthode n'est pas très claire et il ressent aussitôt la nécessité de l'expliquer. Dans son explication, Bombelli emploie la dénomination *Tanto*, qui représente pour lui une inconnue, une quantité à déterminer. Et il accorde en genre et en nombre *Tanto* par *Tanti* lorsque le coefficient est supérieur à l'unité... ce qui complique un peu pour nous la lecture de son explication.

Explication de sa règle par Bombelli lui-même. [49]

Étant donné que, si on a à trouver la racine la plus proche de 13, le carré de l'entier le plus proche est 9 et la racine est 3, alors, je pose que la racine la plus proche de 13 est $3 + 1 \text{ Tanto}$ et son carré est $9 + 6 \text{ Tanti} + 1 \text{ Carré}$. Et ils ont seulement égalé 6 Tanti à 4, de sorte que le *Tanto* vaudrait $\frac{2}{3}$ et ont fait que l'approximation vaudrait $3 \frac{2}{3}$, parce que la supposition $3 + 1 \text{ Tanto}$ vient à être $3 \frac{2}{3}$.

Mais voulant encore tenir compte du carré du *Tanto*, le *Tanto* valant $\frac{2}{3}$, le *Carré* vaudra $\frac{2}{3}$ du *Tanto* qui, étant ajouté aux 6 Tanti du début donnera : $6 \frac{2}{3}$ de *Tanti* égaux à 4, que je résous. Le *Tanto* vaudra $\frac{3}{5}$ et parce qu'il a été posé $3 + 1 \text{ Tanto}$, on aura $3 \frac{3}{5}$ et le *Tanto* valant $\frac{3}{5}$, le *Carré* vaudra $3 \frac{3}{5}$ de *Tanti* et on aura $6 \frac{3}{5}$ de *Tanti* égal à 4. C'est ainsi que l'on voit d'où naissent les règles vues ci-dessus.

*L'algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri,
Libro Primo, pp.37 et 38 (1572)*

D'entrée de jeu, Bombelli pose facilement que :

$$\sqrt{13} = 3 + 1 \text{ Tanto}$$

ce qui revient à poser :

$$\begin{aligned} 13 &= 9 + 6 \text{ Tanti} + 1 \text{ Carré} \\ 13 &= 9 + 6 \text{ Tanti} + \text{Tanto} \times \text{Tanto} \end{aligned}$$

Dans un premier temps ensuite, Bombelli néglige le *Carré* (de Tanto), soit le terme $\text{Tanto} \times \text{Tanto}$ et résout :

$$13 = 9 + 6 \text{ Tanti}$$

et trouve que $\text{Tanto} = \frac{2}{3}$ et obtient la première approximation $3 + 1 \text{ Tanto} = 3 + \frac{2}{3} = 3 \frac{2}{3}$. En négligeant le *Carré*, Bombelli obtient la même approximation que celle obtenue avec le calcul de la racine carrée avec reste fractionnaire. Bon départ...

Par la suite, Bombelli tient compte du *Carré* comme suit : puisque que le *Tanto* obtenu précédemment est égale à $\frac{2}{3}$, le carré $\text{Tanto} \times \text{Tanto}$ devient $\frac{2}{3} \text{ Tanto}$ et pose alors l'équation :

$$\begin{aligned} 13 &= 9 + 6 \text{ Tanti} + 1 \text{ Carré} \\ 13 &= 9 + 6 \text{ Tanti} + \frac{2}{3} \text{ Tanto} \\ 13 &= 9 + 6 \frac{2}{3} \text{ Tanti} \end{aligned}$$

D'où la résolution donne $\text{Tanto} = \frac{3}{5}$ et donc une deuxième approximation $3 + 1 \text{ Tanto} = 3 + \frac{3}{5} = 3 \frac{3}{5}$.

Et nous recommençons : puisque que le *Tanto* obtenu précédemment est égale à $\frac{3}{5}$, le carré $\text{Tanto} \times \text{Tanto}$ devient $\frac{3}{5} \text{ Tanto}$ et pose alors l'équation :

$$\begin{aligned} 13 &= 9 + 6 \text{ Tanti} + 1 \text{ Carré} \\ 13 &= 9 + 6 \text{ Tanti} + \frac{3}{5} \text{ Tanto} \\ 13 &= 9 + 6 \frac{3}{5} \text{ Tanti} \end{aligned}$$

D'où la résolution donne $\text{Tanto} = \frac{20}{33}$ et donc une deuxième approximation $3 + 1 \text{ Tanto} = 3 + \frac{20}{33} = 3 \frac{20}{33}$.

« C'est ainsi que l'on voit d'où naissent les règles vues ci-dessus ». Je dirais même plus, c'est ainsi que Bombelli nous fait découvrir l'itération. En résumé, nous avons que :

Le calcul de Bombelli revient au calcul itératif suivant :

$$\begin{aligned}\sqrt{n} &= a + Tanto \\ n &= a^2 + 2aTanti + Tanto \times Tanto \\ n &= a^2 + (2a + Tanto)Tanti \\ \frac{n - a^2}{2a + Tanto} &= Tanto\end{aligned}$$

que l'on formule comme suit : $\begin{cases} Tanto[1] = 0 & \text{Amorce} \\ Tanto[i+1] = \frac{n - a^2}{2a + Tanto[i]} & \text{Pour } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

De cette façon, les approximations successives sont données par $a + Tanto[i]$.

Transposons cette règle de calculs, donnée par Bombelli, en une procédure Maple que nous appellerons simplement `Bombelli`. Puisque nous avons généralisé précédemment la règle pour un entier positif n , quelconque, nous allons donner une procédure dont les paramètres seront, dans l'ordre, l'entier n dont on cherche la racine, a le quotient obtenu par l'algorithme de Ptolémée (le plus grand entier dont le carré est inférieur à n) et k l'ordre de l'approximation.

```
> Bombelli:=proc(n::posint,a::posint,k::posint)
  local i,r,Tanto;
  if a<>floor(sqrt(n)) then error a,"n'est pas le plus grand entier dont le carré est inférieur ",n fi;
  Tanto[1]:=0;
  for i from 1 to k do
    Tanto[i+1]:=(n-a^2)/(2*a+Tanto[i])
  od;
  a+Tanto[i];
end proc;
```

Avec cette procédure, obtenons les cinq premières approximations de $\sqrt{13}$ et retrouvons donc les valeurs que Bombelli a données dans son livre pour approcher $\sqrt{13}$.

```
> Digits:=10:
"Le premier calcul donne ",Bombelli(13,3,1);
"Le deuxième calcul donne ",Bombelli(13,3,2);
"Le troisième calcul donne ",Bombelli(13,3,3);
"Le quatrième calcul donne ",Bombelli(13,3,4);
"Le cinquième calcul donne ",Bombelli(13,3,5);

"Le premier calcul donne ",  $\frac{11}{3}$ 
"Le deuxième calcul donne ",  $\frac{18}{5}$ 
"Le troisième calcul donne ",  $\frac{119}{33}$ 
"Le quatrième calcul donne ",  $\frac{393}{109}$ 
"Le cinquième calcul donne ",  $\frac{649}{180}$ 
```

Comparons la valeur du cinquième résultat obtenu avec la procédure Bombelli avec la valeur arrondie de $\sqrt{13}$.

```
> 'Bombelli(13,3,5)'=evalf(Bombelli(13,3,5));
sqrt(13)=sqrt(13.);
```

$$\text{Bombelli}(13,3,5) = 3.605555556$$

$$\sqrt{13} = 3.605551275$$

Dans un deuxième exemple, obtenons les cinq premières approximations de $\sqrt{2}$ avec cette transposition de l'algorithme de Bombelli.

```
> "Le premier calcul donne ",Bombelli(2,1,1);
"Le deuxième calcul donne ",Bombelli(2,1,2);
"Le troisième calcul donne ",Bombelli(2,1,3);
"Le quatrième calcul donne ",Bombelli(2,1,4);
"Le cinquième calcul donne ",Bombelli(2,1,5);
```

$$\text{"Le premier calcul donne "}, \frac{3}{2}$$

$$\text{"Le deuxième calcul donne "}, \frac{7}{5}$$

$$\text{"Le troisième calcul donne "}, \frac{17}{12}$$

$$\text{"Le quatrième calcul donne "}, \frac{41}{29}$$

$$\text{"Le cinquième calcul donne "}, \frac{99}{70}$$

Comparons la valeur du cinquième calcul Bombelli avec la valeur arrondie de $\sqrt{2}$.

```
> 'Bombelli(2,1,5)'=evalf(Bombelli(2,1,5));
sqrt(2)=sqrt(2.);
```

$$\text{Bombelli}(2,1,5) = 1.414285714$$

$$\sqrt{2} = 1.414213562$$

Obtenons la valeur approchée d'ordre 10 de $\sqrt{5678}$. Puis, comparons-la avec celle donnée directement par Maple. La FIG. 27 (voir p.41) montre que Bombelli a trouvé que le plus grand entier dont le carré est inférieur à 5678 est 75. Alors,

```
> 'Bombelli'(5678,75,10)=Bombelli(5678,75,10);
sqrt(5678)-Bombelli(5678,75,10);
``=evalf[30](%);
```

$$\text{Bombelli}(5678,75,10) = \frac{443800055891671997844225}{5889652325077799282993}$$

$$\sqrt{5678} - \frac{443800055891671997844225}{5889652325077799282993}$$

$$= 1.7 \times 10^{-27}$$

Bombelli a donné une seconde méthode afin d'obtenir des valeurs approchées de la racine carrée d'un entier. Comme avec sa première méthode, un exemple (le calcul de $\sqrt{8}$) tient lieu de théorie. On retrouve cette présentation à la page 38 dans l'édition de *L'Algebra* réalisée par l'éditeur Feltrinelli à Milan en 1966, avec une introduction de Forti et une préface de Bortolotti. C'est une édition qui comporte tous les livres I à V.

Avec cette seconde méthode, originale elle aussi, il n'y a pas d'inconnue (*Tanto*) à résoudre, c'est une démarche purement algorithmique. Je vous la présente donnée par Bombelli telle quelle mais transposée dans une procédure Maple que nous appellerons BombelliV2. Cette procédure va permettre aussi d'obtenir des valeurs approchées de la racine carrée d'un entier $n > 0$ quelconque. Il y a un paramètre de plus que le nombre de paramètres de la procédure Bombelli. Les paramètres de BombelliV2 sont, dans l'ordre, le nombre entier n dont on cherche la racine, a le plus grand entier dont le carré est inférieur à n (le quotient de l'algorithme d'Euclide), le « reste » r entier obtenu en même temps avec cet algorithme et, finalement, l'ordre k de la valeur approchée.

```
> BombelliV2:=proc(n::posint,a::posint,r::posint,k::posint)
  local i,R;
  if a<>floor(sqrt(n)) then error a,"n'est pas le plus grand entier dont le carré est inférieur à",n fi;
  if r<>n-floor(sqrt(n))^2 then error "Le reste r n'est pas le bon" fi;
  R[1]:=0;
  if k>1 then
    for i from 1 to k-1 do
      R[i+1]:=((a+r/2/a)^2-n)/(2*(a+r/2/a)-R[i]);
    od
  fi;
  if k=1 then a
  elif k=2 then (a+r/2/a)
  else (a+r/2/a)-R[i-1] fi;
end proc;
```

Pour retrouver ces valeurs approchées de $\sqrt{8}$ données par Bombelli, obtenons les cinq premières approximations de $\sqrt{8}$ avec la procédure BombelliV2.

```
> "Le premier calcul donne ",BombelliV2(8,2,4,1);
"Le deuxième calcul donne ",BombelliV2(8,2,4,2);
"Le troisième calcul donne ",BombelliV2(8,2,4,3);
"Le quatrième calcul donne ",BombelliV2(8,2,4,4);
"Le cinquième calcul donne ",BombelliV2(8,2,4,5);

"Le premier calcul donne ",2
"Le deuxième calcul donne ",3
"Le troisième calcul donne ",  $\frac{17}{6}$ 
"Le quatrième calcul donne ",  $\frac{99}{35}$ 
"Le cinquième calcul donne ",  $\frac{577}{204}$ 
```

Comparons les valeurs approchées d'ordre 10 de $\sqrt{5678}$ données respectivement par les procédures Bombelli et BombelliV2. La FIG. 27 montre que Bombelli a aussi trouvé le reste 53 donné par l'algorithme de Ptolémée, laquelle valeur est requise dans la procédure BombelliV2. Alors,

```
> 'Bombelli'(5678,75,10)=Bombelli(5678,75,10);
sqrt(5678)-Bombelli(5678,75,10);
``=evalf[30](%);
'BombelliV2'(5678,75,53,10)=BombelliV2(5678,75,53,10);
sqrt(5678)-BombelliV2(5678,75,53,10);
``= evalf[50](%);
```

$$\text{Bombelli}(5678,75,10) = \frac{443800055891671997844225}{5889652325077799282993}$$

$$\sqrt{5678} - \frac{443800055891671997844225}{5889652325077799282993}$$

$$= 1.7 \times 10^{-27}$$

$$\begin{aligned} \text{BombelliV2}(5678, 75, 53, 10) &= \frac{770836070356857251546082305261507013383}{10229733849198218702589230439165337350} \\ \sqrt{5678} - \frac{770836070356857251546082305261507013383}{10229733849198218702589230439165337350} \\ &= -6.90 \times 10^{-46} \end{aligned}$$

Voici un tableau comparatif illustrant la supériorité de la seconde méthode de Bombelli (`BombelliV2`) pour obtenir plus rapidement de meilleures valeurs approchées. Approchons $\sqrt{5678}$ avec les deux méthodes.

```
> Digits:=100:
N:=10:
n:=5678:
a:=75:
r:=53:
Écart:=k->evalf[50](X[k]-sqrt(n)):
ÉcartV2:=k->evalf[50](Y[k]-sqrt(n)):
printf("\n Rang Bombelli Bombelli-sqrt(n) BombelliV2
↳ BombelliV2-sqrt(n)\n"):
printf("
↳ -----\n"):
for k from 1 to N by 1 do
X[k]:= Bombelli(n,a,k);
Y[k]:= BombelliV2(n,a,r,k);
Z[k]:=evalf[50](Écart(k));
ZV2[k]:=evalf[50](ÉcartV2(k));
printf(" %03d %2.15f %2.15E %2.15f %2.15E\n", k, X[k], Z[k], Y[k], ZV2[k]):
od:
k:='k':
unassign('N','n','a','r','X','Y','Z','ZV2');
Digits:=10:
```

Rang	Bombelli	Bombelli-sqrt(n)	BombelliV2	BombelliV2-sqrt(n)
001	75.35333333333333	+8.283981953110752E-04	75.00000000000000	-3.525049351380223E-01
002	75.352502992949940	-1.942188082117137E-06	75.35333333333333	+8.283981953110752E-04
003	75.352504939691527	+4.553505064991460E-09	75.352504939691527	+4.553505064991460E-09
004	75.352504935127346	-1.067579823980526E-11	75.352504935138047	+2.502965659064281E-14
005	75.352504935138047	+2.502965659064281E-14	75.352504935138022	+1.375827412340020E-19
006	75.352504935138022	-5.868261042154091E-17	75.352504935138022	+7.562632997745111E-25
007	75.352504935138022	+1.375827412340020E-19	75.352504935138022	+4.157019793733292E-30
008	75.352504935138022	-3.225659279552772E-22	75.352504935138022	+2.285026071031400E-35
009	75.352504935138022	+7.562632997745111E-25	75.352504935138022	+1.256030620000000E-40
010	75.352504935138022	-1.773076847301520E-27	75.352504935138022	+6.900000000000000E-46

Notons qu'avec la méthode `Bombelli`, l'approche est par excès et par défaut tandis qu'avec la méthode `BombelliV2`, l'approche est toujours par excès. Chaque « méthode » de Bombelli est formellement un processus continu de calcul qui permet d'approcher avec des fractions ordinaires, aussi près que souhaité, la racine carrée d'un nombre. Cette manière d'obtenir des approximations successives peut être interprétée quasiment comme des fractions continues, car cela fait intervenir successivement des calculs sur des fractions ordinaires obtenues à chaque étape de la méthode : le calcul fait à chaque étape utilise le résultat obtenu à l'étape précédente. Bombelli ne disposant pas et n'ayant pas créé une notation symbolique appropriée, il n'a jamais décrit l'une ou l'autre de ses méthodes avec des fractions continues. Cela n'en demeure pas moins de remarquables méthodes d'approximations successives. A posteriori, et nous le verrons plus loin, il est possible de développer la méthode `Bombelli` (celle déduite avec l'inconnue *Tanto*) en calculs de fractions continues (généralisées). Mais, Bombelli n'a jamais considéré ses méthodes en termes de fractions continues donc nous ne pouvons dire de Bombelli qu'il soit à l'origine de la représentation des nombres en fractions continues.

Pietro Cataldi — Un précurseur

Le travail de Cataldi (Pietro Cataldi 1548 – 1626) sur les fractions continues est apparu en 1613, longtemps après le travail de Bombelli avec ses méthodes qu'il a décrites en 1572 dans son *L'algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri* [9]. Bien que Bombelli lui-même ne pensait pas en termes de fractions continues, ni implicitement ni explicitement, il est tout à fait possible que Cataldi ait eu l'idée des fractions continues après avoir lu le livre de Bombelli.

Le livre *Trattato del modo brevissimo di trouare la radice quadra delli numeri, et regole da approssimarsi di coninuo al vero nelle radice de' numeri non quadrati, con le cause, et inventioni loro. Et anco il modo di pigliarne la radice cuba, applicando il tutto alle operationi militari et altre* [10] (Traité sur la méthode la plus courte pour trouver la racine carrée des nombres) de Pietro Antonio Cataldi, a été publié à Bologne en 1613. Son livre renferme deux idées fondamentales : l'emploi des suites infinies (p.12 et suiv.) et l'emploi des fractions continues (p.40 et suiv.). Cataldi donne l'algorithme des fractions continues généralisées. Le travail de Cataldi contenait le tout premier indice de la notation moderne des fractions continues. Ayant trouvé une approximation en tant que fraction continue (que Cataldi appelait « rotti di rotti » (nombres rompus de nombres rompus, soit fractions de fractions), Cataldi l'exhibait en utilisant une notation en « diagonale ».

À la page 70 de son traité, Cataldi a, dans un premier temps, écrit la fraction continue en diagonale :

$$4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$$

puis précise aussitôt que cette notation des « rotti di rotti » n'est pas commode à typographier « *Notifi, che nò si potendo comodaméte nella stampa formare...* ».

¶ **Notifi, che nò si potendo comodaméte nella stampa formare i rotti, & rotti di rotti come andariano, cioè così** $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$ **come ci siamo sforzati di fare in questo, noi da qui inãzi gli formaremo tutti à q'la similitudine** $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$ **facendo vn punto all'8. denominatore di ciascun rotto, à significare, che il seguente rotto è rotto d'esso denominatore.**

Fig. 31 – Notation en diagonale de Cataldi, p.70 – *Trattato del modo brevissimo...* 1613

Dans la suite de son texte, il se propose de les écrire sur une même ligne : $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$.

À la page 71 de son traité, en donnant une approximation de $\sqrt{18}$, le point n'est pas placé après les nombres du dénominateur, mais placé plus haut, soit au niveau de la composition de la ligne des « & » (Voir FIG. 32).

Sesta. Di 18. la R. fia $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
ò vogliamo dire $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
 cioè $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
ò vogliamo dire $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
 che è $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
 cioè $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
ò vogliamo dire $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
 che è $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$
 cioè $4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}$ **Quadrifi**

Auertasi bene in questi rotti, che non si può, ò non si deu-ue schifare (e non l'ultimo rotto di mano in mano, che da lui non hanno dipendenza altri rotti, per il che con lo schifarlo non può variarsi il valore del rotto totale, come si variaria schifando altro rotto, che l'ultimo.

Fig. 32 – Cataldi, calculs à rebours des « rotti di rotti » de $\sqrt{18}$

Le séparateur « . & » entre chaque fraction, signifie que la fraction suivante est une fraction du dénominateur précédent. Cela ressemble étonnamment à une certaine notation moderne d'une fraction continue généralisée :

$$4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \hookrightarrow 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8}}}$$

À juste titre, ce sont par ses travaux que le mathématicien Pietro Antonio Cataldi est considéré comme celui ayant jeté les bases de la théorie des fractions continues.

Cataldi décrit, à la page 12 de son traité, une autre manière de calculer $\sqrt{18}$, manière basée sur les suites infinies de fractions ordinaires. Dans ces pages, Cataldi montre que cet algorithme permet d'obtenir des approximations de plus en plus fines à mesure que le nombre d'étapes augmente. Ces approximations sont systématiquement des approximations **par excès** *che fia più del douere*. Voici une transcription de son algorithme en notation d'aujourd'hui : soit le calcul de $\sqrt{N}$. Posons $N = a^2 + b$ telle que $a^2 < N < (a+1)^2$. Chacune des étapes de calculs suivantes permet d'obtenir une nouvelle et meilleure approximation, mais toujours par excès.

Étape 1. $N = a^2 + b$. On calcule $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} = A$

Étape 2. $\frac{A^2 - N}{2A} = B$. On calcule $\sqrt{a^2 + b} \approx A - B$

Étape 3. $\frac{(A-B)^2 - N}{2(A-B)} = C$. On calcule $\sqrt{a^2 + b} \approx A - B - C$

Étape 4. $\frac{(A-B-C)^2 - N}{2(A-B-C)} = D$. On calcule $\sqrt{a^2 + b} \approx A - B - C - D$

et ainsi de suite.

Nous avons donc ici un autre algorithme de calcul continu permettant d'approcher de plus en plus, avec des fractions ordinaires, la racine carrée d'un nombre. Transposons cet algorithme en une procédure Maple que nous appellerons Cataldi. Avec cette procédure, comparons un calcul de $\sqrt{44}$ avec la valeur donnée directement avec Maple. ($\sqrt{44}$ est la racine carrée développée dans son traité à la page 12 : *Proposto poniamo di trouare la radice quadra di 44*)

```
> Cataldi:=proc(N::posint,a::posint,b::posint,k::posint)
  local i,j,M,U,t;
  if a<>floor(sqrt(N)) then error a,"n'est pas le plus grand entier dont le carré est inférieur à",N fi;
  if N<>a^2+b then error "La valeur de b ne vérifie pas la condition N=a^2+b" fi;
  M:=N;
  U[1]:=a+b/(2*a);
  U[2]:=(U[1]^2-N)/(2*U[1]);
  for i from 3 by 1 while i<=k do
    U[i]:=((U[1]-sum(U[j],j=2..i-1))^2-N)/(2*(U[1]-sum(U[j],j=2..i-1)));
  od;
  if k=1 then U[1] else
    U[1]-sum(U[t],t=2..k)
  fi
end proc;
```

Nous avons que $\sqrt{44} = \sqrt{6^2 + 8}$. Obtenons l'approximation d'étape 5 avec $N = 44, a = 6, b = 8$ et $k = 5$.

```
> 'sqrt'(44)=Cataldi(44,6,8,5);
``=evalf(rhs(%));
```

$$\sqrt{44} = \frac{314783998186522867201}{47455473272391407760} = 6.633249581$$

```
> %evalf[50](Cataldi(44,6,8,5)-'sqrt(44)');
``=value(%);
```

$$\text{evalf}_{50}\left(\frac{314783998186522867201}{47455473272391407760} - \sqrt{44}\right) = 3.34711818 \times 10^{-41}$$

Note historique et remarque

Dans son *Histoire des sciences mathématiques en Italie : depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII^e siècle* (Tome 4), Paris, 1841, Guillaume Libri (1803-1869) expose en bas de page, à la page 93, le procédé « fort ingénieux » de Cataldi pour trouver de manière expéditive la racine carrée d'un nombre. Il y développe algorithmiquement la méthode de Cataldi pour le calcul de la $\sqrt{44}$. Malheureusement, à partir de la troisième égalité, Guillaume Libri a faussement transposé la méthode de Cataldi. À la page 255 du *Bullettino Di Bibliographia E Di Storia delle Scienze Mathematiche E Fisiche*, Tomo VII (1874), on retrouve la réponse de François Woepcke (datée du 5 décembre 1861) au prince Don Balthasar Boncompagni à plusieurs questions qu'il lui avait adressées à propos de la méthode de Cataldi formulée par Guillaume Libri [89].

À la page 18, Cataldi détaille un autre algorithme d'approximations successives, aussi avec des fractions ordinaires, mais qui donne plutôt systématiquement des approximations **par défaut** *che fia minore del douere*. « Les calculs et les discours d'une longueur rebutante ont nui à la réputation de cet ouvrage qui renferme deux découvertes importantes : les approximations *sériaires* et les approximations *par fractions continues*. »

Après Cataldi, mentionnons Daniel Schwenter (1585 – 1636). Dans son *Geometria practica nova. Tractatus II*. (préface datée du 1^{er} janvier 1617 ; p. 58-59) Daniel Schwenter a, sans connaître probablement les travaux de Cataldi, déduit les réduites $\frac{79}{104}$, $\frac{19}{25}$ et $\frac{3}{4}$ de la fraction ordinaire $\frac{177}{233}$ en calculant le PGCD de 177 et 233. Une réduite, comme nous le préciserons un peu plus loin, est une fraction continue limitée (tronquée). Il est le premier à faire usage de réduites pour approcher des fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont de grands nombres. < <https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/8092/5> >

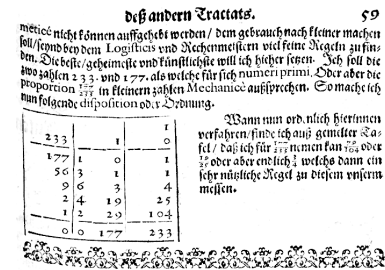


FIG. 33 – D. Schwenter – *Geometria practica nova. Tractatus II*... 1617

Fractions continues simples finies

Exposons maintenant quelques considérations sur les fractions continues simples, question de se familiariser avec de tels objets mathématiques. Ces premiers pas théoriques en la matière seront faits avec les fractions continues simples finies.

Définition — Fraction continue simple finie

La forme générale est :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$$

où les a_i sont les *quotients partiels* ou tout simplement les *quotients* de la fraction continue. Tous les numérateurs partiels sont des 1 et tous les quotients partiels sont des entiers positifs sauf a_0 qui peut être nul ou être un entier négatif.

Cette écriture, très peu compacte, peut être remplacée par les notations suivantes :

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k] \text{ ou } a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + a_k}}}$$