

Chapitre XVIII : Des fractions continues

Le dernier chapitre (chapitre XVIII) du premier tome de son *Introductio in analysin infinitorum*, Euler l'a intitulé *De fractionibus continuis*. Pour la première fois dans l'histoire des mathématiques et ce, dans le cadre d'un manuel mathématique, on expose une approche analytique élémentaire aux fractions continues et à certaines de leurs propriétés. En introduction, Euler entrevoit lucidement que les fractions continues seront un apport important en analyse infinitésimale :

§356. Après avoir traité assez au long dans les Chapitres précédents des séries infinies, & des produits composés de facteurs infinis, il convient de dire un mot d'une troisième espèce de formules infinies, que donnent les divisions ou fractions continues. Car quoique cette partie ait été peu cultivée jusqu'à présent, je ne doute pas que l'usage n'en devienne très-grand dans l'analyse infinitésimale. Quelques essais que j'en ai faits m'autorisent à le croire. Cette théorie ne laissera pas d'être particulièrement d'un assez grand secours pour l'Arithmétique & l'Algebre ordinaire; c'est ce que je me propose d'exposer & d'expliquer en peu de mots dans ce Chapitre.

L. Euler — *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne 1748)
§356 à la page 277 dans la traduction française de J.B. Labey

Dans ce chapitre, Euler introduit le lecteur aux fractions continues. Donnant d'abord la définition d'une fraction continue simple et généralisée, **laquelle fraction continue pourrait être finie ou être prolongée à l'infini**.

§357. J'appelle fraction continue une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier & une fraction formée de la même manière que les précédentes, ainsi de suite, soit qu'il y ait un nombre infini de fractions, soit qu'il n'y en ait qu'un nombre fini.

Telles sont les expressions suivantes :

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \&c.}}}}} \quad \text{ou} \quad a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \&c.}}}}}$$

Article §358. Après avoir ainsi donné la forme des fractions continues, voyons d'abord comment on peut obtenir leur valeur sous la forme ordinaire. Pour faciliter cette recherche, allons, par degrés, & interrompons la suite : d'abord à la première, ensuite à la seconde, puis à la troisième fraction ; cela posé, il est clair qu'on aura

$$\begin{aligned} a &= a \\ a + \frac{1}{b} &= \frac{ab + 1}{b} \\ a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} &= \frac{abc + a + c}{bc + 1} \\ a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} &= \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d} \\ a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}} &= \frac{abcde + abe + ade + cde + abc + a + c + e}{bcde + be + de + bc + 1} \\ &\&c. \end{aligned}$$

À l'article §359. Euler donne une disposition des numérateurs partiels pour mettre en évidence la manière dont chaque fraction partielle peut-être déduite systématiquement des précédentes.

Quoique dans ces fractions ordinaires, on ne reconnoisse pas facilement la loi suivant laquelle le numérateur & le dénominateur sont composés des lettres a, b, c, d, &c. cependant, avec un peu d'attention, on pourra découvrir comment chaque fraction dérive des précédentes. En effet, chaque numérateur est la somme du dernier numérateur multiplié par une nouvelle lettre & de l'avant-dernier numérateur simple; & la même loi s'observe pour les dénominateurs. Ayant donc écrit par ordre les lettres a, b, c, d, &c. on en formera facilement les fractions, de cette manière :

$$\frac{a}{o}; \quad \frac{b}{1}; \quad \frac{c}{ab+1}; \quad \frac{d}{abc+a+c}; \quad \frac{e}{abcd+ab+ad+cd+1}$$

Chaque numérateur se trouve en multipliant le dernier par la lettre qui est écrite au-dessus de celui-ci, & en ajoutant au produit de l'avant-dernier. Il en est de même des dénominateurs; mais pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans la loi, j'ai écrit à la tête la fraction $\frac{1}{o}$, qui, quoiqu'elle ne dérive pas de la fraction continue, est propre pourtant à rendre plus sensible la loi de la progression. Au reste, chaque fraction exprime la valeur de la fraction continue en supposant qu'elle ait été continuée inclusivement jusqu'à la lettre écrite au-dessus du terme qui précède.

Cette « loi » de la progression énoncée par Euler de manière heuristique, c'est exactement la récurrence donnée par la PROPOSITION 3 de la page 62 pour obtenir la k^e réduite d'une fraction continue simple. C'est ce que nous avons transposé en une procédure Maple que nous avons appelé Principales.

À l'article §360., Euler poursuit avec les réduites d'une fraction continue généralisée :

On obtiendra semblablement pour l'autre formule des fractions continues, savoir :

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \dots}}}}}$$

les résultats suivants, selon le nombre de termes qu'on prendra, (L'auteur a ajouté une réduite supplémentaire aux quatre réduites données dans son texte par Euler.)

$$\begin{aligned} a &= a \\ a + \frac{\alpha}{b} &= \frac{ab + \alpha}{b} \\ a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c}} &= \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta} \\ a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d}}} &= \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha \gamma}{bcd + \beta d + \gamma b} \\ a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e}}}} &= \frac{abcde + \delta abc + \gamma abe + \beta ade + \alpha cde + \beta \delta a + \alpha \delta c + \alpha \gamma e}{bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta \delta} \quad \&c. \end{aligned}$$

Chacune de ces fractions se trouvera au moyen des deux précédentes, comme on le voit ici :

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{o}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}; & \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha \gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

À l'article §361., Euler énonce la récurrence pour la formation de ces fractions (réduites) : *Pour former ces fractions, écrivez au-dessus les indices a, b, c, d , &c. écrivez encore la première fraction $\frac{1}{0}$, & la seconde $\frac{a}{1}$; vous aurez alors chacune des suivantes en multipliant le numérateur de la dernière par l'indice supérieur, & celui de l'avant-dernière par l'indice inférieur correspondant; la somme de ces produits sera le numérateur de la fraction demandée. De même le dénominateur sera formé du produit du dénominateur précédent par l'indice supérieur, & de celui de l'avant-dernier par l'indice inférieur; & chaque fraction trouvée de cette manière donnera la valeur de la fraction continue, en supposant qu'on l'ait continuée inclusivement jusqu'au dénominateur qui est écrit au-dessus de la fraction précédente.*

La règle progressive d'obtention des réduites a déjà été énoncée antérieurement par Euler dans son mémoire *De fractionibus continuis differtation*. Nous allons considérer plus loin dans le texte les 35 articles de ce mémoire et c'est à l'article §7. que nous allons transposer cette règle d'obtention des réduites d'une fraction continue généralisée en une procédure Maple que nous appellerons **RéduitesRègleEuler**. D'ici là, les réduites d'ordre k d'une fraction continue généralisée seront obtenues par simplification avec la requête `value(Fcg(L,k))`.

```
> FCG:=[a,[1,b],[1,c],[1,d],[1,e],[1,f]]:
   FCG=Fcg(FCG,5);
```

$$[a,[1,b],[1,c],[1,d],[1,e],[1,f]] = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f}}}}}$$

```
> seq(print(Fcg(FCG,k)=normal(value(Fcg(FCG,k))))),k=0..4);
```

$$\begin{aligned} a &= a \\ a + \frac{1}{b} &= \frac{ab+1}{b} \\ a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} &= \frac{abc+a+c}{bc+1} \\ a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} &= \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d} \\ a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}} &= \frac{abcde+abc+abe+ade+cde+a+c+e}{bcde+bc+be+de+1} \end{aligned}$$

```
> FCG:=[a,[alpha,b],[beta,c],[gamma,d],[delta,e],[varepsilon,f]]:
   FCG=Fcg(FCG,5);
```

$$[a,[\alpha,b],[\beta,c],[\gamma,d],[\delta,e],[\varepsilon,f]] = a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f}}}}}$$

```
> seq(print(Fcg(FCG,k)=normal(value(Fcg(FCG,k)))),k=0..4);
```

$$\begin{aligned}
 a &= a \\
 a + \frac{\alpha}{b} &= \frac{ab + \alpha}{b} \\
 a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c}} &= \frac{abc + a\beta + \alpha c}{bc + \beta} \\
 a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d}}} &= \frac{abcd + ab\gamma + a\beta d + \alpha cd + \alpha \gamma}{bcd + b\gamma + \beta d} \\
 a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e}}}} &= \frac{abcde + abc\delta + abe\gamma + a\beta de + \alpha cde + a\beta \delta + \alpha c\delta + \alpha e\gamma}{bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta \delta}
 \end{aligned}$$

À l'article §362., Euler expose certaines caractéristiques intrinsèques des fractions continues finies et infinies. Dans le cas d'une fraction continue finie, la dernière réduite est la *vraie valeur de la fraction continue* tandis que les réduites précédentes approcheront de plus en plus cette valeur et *donneront par conséquent une approximation très-suffisante*. Euler explique clairement que ces approximations successives se font par excès et par défaut *quand même la fraction continue ferait prolongée à l'infini*.

Donc, si l'on poursuit la formation de ces fractions jusqu'à ce que la fraction continue ne fournisse plus d'indices, la dernière fraction, qu'on obtiendra, donnera la *vraie valeur de la fraction continue*. Les fractions précédentes approcheront de plus en plus cette valeur, & donneront par conséquent une *approximation très-suffisante*. En effet, supposons la *vraie valeur de la fraction continue* :

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \&c}}}}} \text{ est } = x$$

Il est évident que la première fraction $\frac{1}{0}$ est plus grande que x (pour Euler, $\frac{1}{0}$ est l'infini); mais la seconde $\frac{a}{1}$ sera plus petite; la troisième $a + \frac{a}{b}$ sera de nouveau plus grande, & la quatrième plus petite; ainsi, ces fractions seront alternativement plus grandes & plus petites que x . Au reste, il est clair que chaque fraction approche plus près la *vraie valeur de x* , qu'aucune des précédentes; d'où il suit qu'on peut, de cette manière, avoir facilement & promptement la *valeur approchée de x* , quand même la fraction continue ferait prolongée à l'infini, pourvu que les numérateurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$, ne croissent pas trop; mais si tous les numérateurs égalent l'unité, l'approximation ne peut manquer d'avoir lieu.

Conversion d'une fraction continue généralisée en série alternée

Aux articles §363. et §364., Euler déduit facilement une manière de s'y prendre pour convertir une fraction continue en une série dont les termes ont alternativement des signes $+$ & $-$ lorsque le premier *a manque*.

Pour faire mieux ressentir comment on approche de la *vraie valeur de la fraction continue*, prenons les différences des fractions trouvées ci-dessus. D'abord, en négligeant la première $\frac{1}{0}$, la différence entre la seconde & la troisième $= \frac{a}{b}$; la quatrième soustraite de la troisième donne pour reste (différence) $\frac{\alpha\beta}{b(bc + \beta)}$, & la quatrième soustraite de la cinquième donne $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc + \beta)(bcd + \beta d + \gamma b)}$, &c. Ainsi la valeur de la fraction

continue sera représentée par une suite de la forme ordinaire, de manière que $x = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\delta}{b(bc+\delta)} + \frac{\alpha\delta\gamma}{(bc+\delta)(bcd+\delta d+\gamma b)} - \&c.$ **série qui sera limitée, toutes les fois que la fraction continue ne se prolongera pas à l'infini.** Nous avons donc un moyen de convertir une fraction continue en une série, dont les termes ont alternativement les signes $+$ & $-$ lorsque le premier a manque.

En effet, soit

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\delta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \&c.}}}}$$

on aura, par ce qui précède

$$x = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\delta}{b(bc+\delta)} + \frac{\alpha\delta\gamma}{(bc+\delta)(bcd+\delta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\delta\gamma\delta}{(bcd+\delta d+\gamma b)(bcde+\delta de+\gamma be+\delta bc+\delta\delta)} + \&c.$$

D'où il suit que si les numérateurs $\alpha, \delta, \gamma, \delta$ &c. ne croissent pas, si, par exemple, ils sont égaux à l'unité, & que les dénominateurs $a, b, c, d, \&c.$ soient des nombres entiers quelconques positifs, la valeur de la fraction continue sera donnée par une série très-convergente.

La procédure Maple suivante `FcgVersSérie` effectue la conversion d'une fraction continue en série. Chaque terme de rang $k \geq 2$ de la série est obtenu en soustrayant la réduite d'ordre k à la réduite d'ordre $k-1$. Le premier argument est la fraction continue en notation de Pringsheim. Le second argument est le nombre de fractions partielles de la fraction continue à convertir. Si ce nombre est supérieur au nombre total de fractions partielles de la fraction continue, un message d'erreur s'affichera :

```
> FcgVersSérie:=proc(L::list,n::posint)
  local i,k,S,Signe,Termes;
  Termes:=[(op(1,L),seq(normal(value(Fcg(L,k))-value(Fcg(L,k-1))),k=1..nops(L)-1))];
  S:=map(`%+`,op(1..n+1,Termes));
  ifelse(op(1,S)=0,subs(op(1,S)=NULL,S),S);
end proc;
```

```
> F:=[0,[alpha,b],[beta,c],[gamma,d],[delta,e],[varepsilon,f]]:
x:=Fcg(F,5);
x:=FcgVersSérie(F,5);
F:='F':
```

$$x = \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f}}}}}$$

$$x = \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{(bc+\beta)b} + \frac{\alpha\gamma\beta}{(bcd+b\gamma+\beta d)(bc+\beta)} - \frac{\alpha\gamma\beta\delta}{(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)(bcd+b\gamma+\beta d)} + \frac{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon}{(bcdef+bcd\varepsilon+bc\delta f+be\gamma\gamma+\beta def+b\gamma\varepsilon+\beta d\varepsilon+\beta\delta f)(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)}$$

Note : Dans la fenêtre Maple précédente, nous avons ajouté un cinquième terme au développement qu'a donné Euler dans son *Introductio* à la page 300 de la version latine.

Exemple numérique pour illustrer cette procédure :

```
> FCG:= [0, [1,1], [1,1], seq([k^2,1], k=2..8)];
Fcg(FCG,9)=FcgVersSérie(FCG,9);
value(%);
```

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1879}{2520} = \frac{1879}{2520}$$

Pour que le lecteur puisse mieux entrevoir la règle de la formation des termes d'une telle série, notons que la procédure `FcgVersSérie` permet d'obtenir autant de termes de la série que l'on voudra. Cette procédure nous sera très utile pour détailler ultérieurement plusieurs développements d'Euler.

Conversion d'une série alternée en fraction continue généralisée

Ayant mis en évidence qu'il est possible de transformer une fraction continue en série, Euler s'intéresse ensuite à la réciprocité (à l'article §365. et les suivants) : soit la manière de s'y prendre pour changer une série alternée en fraction continue.

$$x = A - B + C - D + E - F + G - H + I - J + \&c.$$

C'est une introduction plutôt aride aux fractions continues où Euler a estimé nécessaire de le faire ainsi. Cela lui permet alors de faire rapidement le pont entre les séries numériques qu'il a obtenues précédemment dans son ouvrage avec cette troisième espèce de formules infinies que sont les fractions continues. Sa proposition de conversion d'une série alternée de cette forme est plutôt difficile à suivre mais, en faisant intervenir Maple, les simplifications sont obtenues beaucoup plus rapidement et permettent de réduire substantiellement la longueur du développement *manu scriptus* d'Euler. Nous n'allons pas complètement suivre, étape par étape, les suppositions qui sont faites à l'article §366. et tout le travail algébrique qui s'en suit à l'article §367. Nous allons passer directement à l'article §368. où Euler, en choisissant les dénominateurs partiels, déduit une de ses propositions de conversion. Par contre, à l'Annexe A, on trouvera l'exposé *manu scriptus* d'Euler et donc, tout le détail minutieux de son travail déployé aux articles §366 et §367. À cette annexe, en détaillant longuement les différentes substitutions systématiques, on comprendra que le but d'Euler est de démontrer clairement que les simplifications peuvent toujours être ainsi faites afin d'obtenir la conversion de la série alternée en fraction continue.

Pour permettre de mieux dégager la généralisation de chaque règle de conversion donnée par Euler, nous allons étayer davantage le développement d'Euler par l'ajout de quatre fractions partielles :

$$[\zeta, g], [\eta, h], [\theta, i], [i, j]$$

Nous devons d'abord faire l'initialisation suivante :

```
> interface(imaginaryunit=ZZ):
unprotect(gamma);
unprotect(j);
unprotect(D);
unprotect(0);
```

De plus, pour les développements à venir, faisons les assignations suivantes des lettres latines minuscules et majuscules et des lettres grecques minuscules :

```
> LLatinesm:=[b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n];
LLatinesM:=[A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,WW];
LGrecquesm:=[alpha,beta,gamma,delta,varepsilon,zeta,eta,theta,iota];
```

$$LLatinesm := [b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n]$$

$$LLatinesM := A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, WW]$$

$$LGrecquesm := [\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota]$$

§365. Série $x = A - B + C - D + E - F + \&c.$

Cela posé, on pourra réciproquement changer en fraction continue une suite de termes qui ont alternativement des signes différents, ou trouver une fraction continue, dont la valeur soit égale à la somme de la série proposée. Par exemple si on a l'équation (sic)

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

la comparaison de cette suite avec les termes correspondants de la série qui représente la fraction continue donnera les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} A = \frac{\alpha}{b}; & \text{d'où } \alpha = Ab, \\ \frac{B}{A} = \frac{\ell}{bc + \ell}; & \ell = \frac{Bbc}{A - B} \\ \frac{C}{B} = \frac{\gamma b}{bcd + \ell d + \gamma b}; & \gamma = \frac{Cd(bc + \ell)}{b(B - C)} \\ \frac{D}{C} = \frac{\delta(bc + \ell)}{bcde + \ell de + \gamma be + \delta bc + \ell \delta}; & \delta = \frac{De(bcd + \ell d + \gamma b)}{(bc + \ell)(C - D)} \\ & \&c.. \end{array}$$

Les comparaisons formulées par Euler des rapports de deux termes consécutifs sont limitées aux égalités $A, \frac{B}{A}, \frac{C}{B}$ et $\frac{D}{C}$. Dans nos calculs, nous allons ajouter les cinq rapports suivants : $\frac{E}{D}, \frac{F}{E}, \frac{G}{F}, \frac{H}{G}$ et $\frac{I}{H}$.

En conséquence, générons d'abord la série devant permettre les comparaisons :

```
> FCG:=[0,[LGrecquesm[k],LLatinesm[k]]$k=1..9];
TermesPremierType:=[op(1..9,FcgVersSérie(FCG,9))]:
Termes:=p->(-1)^(p+1)*LLatinesM[p]:
x:=add(Termes(k),k=1..6)+`&c.`;
x:=add(TermesPremierType[k],k=1..6)+`&c.`;
```

$$FCG := [0, [\alpha, b], [\beta, c], [\gamma, d], [\delta, e], [\varepsilon, f], [\zeta, g], [\eta, h], [\theta, i], [\iota, j]]$$

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

$$\begin{aligned} x = & \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{(bc + \beta)b} + \frac{\alpha\gamma\beta}{(bcd + b\gamma + \beta d)(bc + \beta)} - \frac{\alpha\gamma\beta\delta}{(bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta\delta)(bcd + b\gamma + \beta d)} \\ & + \frac{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon}{(bcdef + bcde\varepsilon + bc\delta f + bef\gamma + \beta def + b\gamma\varepsilon + \beta de + \beta\delta f)(bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta\delta)} \\ & - (\alpha\gamma\beta\delta\zeta\varepsilon) / ((bcdefg + bcde\zeta + bcdg\varepsilon + bc\delta fg + bef\gamma\gamma + \beta defg + bc\delta\zeta + be\gamma\zeta + b\gamma\varepsilon + \beta de\zeta + \beta dge \\ & + \beta\delta fg) + \beta\delta\zeta)(bcdef + bcde\varepsilon + bc\delta f + bef\gamma + \beta def + b\gamma\varepsilon + \beta de + \beta\delta f)) + \&c. \end{aligned}$$

Établissons les comparaisons terme à terme :

```

> Rapport[1]:=Termes(1)=op(1,TermesPremierType):
LettresGrecques[1]:=isolate(Rapport[1],LGrecquesm[1]): #Pour affichage informatif
for k from 2 to nops(TermesPremierType) do
  Rapport[k]:=-Termes(k)/Termes(k-1)=(-op(k,TermesPremierType))/op(k-1,TermesPremierType):
  LettresGrecques[k]:=factor(isolate(%,LGrecquesm[k])): #Pour affichage informatif
od:
k:='k':
NumérateursPartiels:=[LettresGrecques[1],LettresGrecques[2],seq(normal(subs(LettresGrecques[k-1],Le
↪ ttresGrecques[k])),k=2..9)]:
seq(print(Rapport[k]),k=1..nops(TermesPremierType)-3);

```

$$A = \frac{\alpha}{b}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{bc + \beta}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma b}{bcd + b\gamma + \beta d}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta(bc + \beta)}{bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta\delta}$$

$$\frac{E}{D} = \frac{\varepsilon(bcd + b\gamma + \beta d)}{bcdef + bcde\varepsilon + bc\delta f + bef\gamma + \beta def + b\gamma\varepsilon + \beta d\varepsilon + \beta\delta f}$$

$$\frac{F}{E} = \frac{\zeta(bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta\delta)}{bcdefg + bcde\zeta + bcdg\varepsilon + bc\delta fg + befg\gamma + \beta defg + bc\delta\zeta + be\gamma\zeta + bg\gamma\varepsilon + \beta de\zeta + \beta dg\varepsilon + \beta\delta fg + \beta\delta\zeta}$$

Isolons les numérateurs partiels dans chacun de ces rapports, soit les lettres grecques α, β, γ jusqu'au numérateur partiel ι . En les affichant pour information, on observera qu'à partir du numérateur partiel γ , tous les numérateurs partiels subséquents comportent des numérateurs partiels précédents.

Puisque la place pour un affichage lisible des résultats est limitée, nous n'afficherons que les sept premiers numérateurs partiels :

```

> seq(print(LettresGrecques[k]),k=1..nops(TermesPremierType)-2);

```

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbc}{A - B}$$

$$\gamma = \frac{Cd(bc + \beta)}{b(B - C)}$$

$$\delta = \frac{De(bcd + b\gamma + \beta d)}{(bc + \beta)(C - D)}$$

$$\varepsilon = \frac{Ef(bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta\delta)}{(bcd + b\gamma + \beta d)(D - E)}$$

$$\zeta = \frac{Fg(bcdef + bcde\varepsilon + bc\delta f + bef\gamma + \beta def + b\gamma\varepsilon + \beta d\varepsilon + \beta\delta f)}{(bcde + bc\delta + be\gamma + \beta de + \beta\delta)(E - F)}$$

$$\eta = \frac{Gh(bcdefg + bcde\zeta + bcdg\varepsilon + bc\delta fg + befg\gamma + \beta defg + bc\delta\zeta + be\gamma\zeta + bg\gamma\varepsilon + \beta de\zeta + \beta dg\varepsilon + \beta\delta fg + \beta\delta\zeta)}{(bcdef + bcde\varepsilon + bc\delta f + bef\gamma + \beta def + b\gamma\varepsilon + \beta d\varepsilon + \beta\delta f)(F - G)}$$

C'est alors qu'Euler s'emploie à de longues manipulations algébriques afin d'exprimer finalement tous les numérateurs partiels ne comportant seulement que les termes de la série et des dénominateurs partiels. C'est donc ici que l'on abrègera le développement original d'Euler qui nous permettra d'arriver plus rapidement à l'étape permettant de déduire la formule de conversion, soit l'étape où les numérateurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

peuvent être exprimés strictement en termes $A, B, C, D, \dots$ de la série et des dénominateurs partiels $a, b, c, d, \dots$. Par contre, on retrouvera intégralement le développement original d'Euler à l'Annexe A, page 289.

Pour y arriver aussi directement, nous avons déjà inclus, dans l'avant-dernier bloc précédent de requêtes, les substitutions en cascade des numérateurs partiels avec lesquels le mécanisme de la simplification automatique de Maple a pleinement joué son rôle...

```
> seq(print(sort(NumérateursPartiels[k])), k=1..nops(NumérateursPartiels));
```

$$\begin{aligned}\alpha &= Ab \\ \beta &= \frac{Bbc}{A-B} \\ \gamma &= \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)} \\ \delta &= \frac{BDde}{(C-D)(B-C)} \\ \varepsilon &= \frac{CEef}{(D-E)(C-D)} \\ \zeta &= \frac{DFfg}{(E-F)(D-E)} \\ \eta &= \frac{EGgh}{(F-G)(E-F)} \\ \theta &= \frac{FHhi}{(G-H)(F-G)} \\ \iota &= \frac{Glij}{(H-I)(G-H)}\end{aligned}$$

Les valeurs des numérateurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ étant donc trouvées, les dénominateurs $b, c, d, e, \dots$ restent arbitraires; il convient seulement de les prendre tels qu'étant eux-mêmes des nombres entiers, ils donnent aussi des nombres entiers pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ce qui dépend encore de la nature des nombres $A, B, C, \dots$ suivant qu'ils sont entiers ou fractionnaires. Supposons d'abord qu'ils soient entiers, on satisfiera à la condition demandée en faisant :

```
> Choix:=[
  b=1,
  c=A-B,
  d=B-C,
  e=C-D,
  f=D-E,
  g=E-F,
  h=F-G,
  i=G-H,
  j=H-I]:
subs(Choix, NumérateursPartiels);
```

$$[\alpha = A, \beta = B, \gamma = AC, \delta = BD, \varepsilon = CE, \zeta = DF, \eta = EG, \theta = FH, \iota = GI]$$

Par conséquent, si :

```
> x=add(Termes(k), k=1..9)-`&c.`;
```

$$x = A - B + C - D + E - F + G - H + I - \&c.$$

la même valeur de x pourra être exprimée par une fraction continue de cette manière :

```
> x=Fcg(FCG,nops(FCG)-1):
subs([op(subs(Choix,NumérateursPartiels)),op(Choix)],%);
```

$$x = \frac{A}{1 + \frac{B}{A - B + \frac{AC}{B - C + \frac{BD}{C - D + \frac{CE}{D - E + \frac{DF}{E - F + \frac{EG}{F - G + \frac{FH}{G - H + \frac{GI}{H - I}}}}}}}}}$$

§369. Série $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \frac{1}{F} + \&c.$

Mais si tous les termes de la série font des nombres fractionnaires, de sorte que

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \frac{1}{F} + \&c.$$

```
> FCG:= [0, [LGrecquesm[k], LLatinesm[k]] $k=1..9]:
TermesPremierType:= [op(1..9, FcgVersSérie(FCG, 9))]:
Termes:= p-> (-1)^(p+1)*1/LLatinesM[p]:
x:= add(Termes(k), k=1..6) + `&c.`;
x:= add(TermesPremierType[k], k=1..6) + `&c.`;
```

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \frac{1}{F} + \&c.$$

On aura pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$, les valeurs suivantes :

```
> Rapport[1]:=Termes(1)=op(1,TermesPremierType):
LettresGrecques[1]:=isolate(Rapport[1], LGrecquesm[1]):
for k from 2 to nops(TermesPremierType) do
  Rapport[k]:=Termes(k)/(-Termes(k-1))=(op(k,TermesPremierType))/(-op(k-1,TermesPremierType)):
  LettresGrecques[k]:=isolate(%, LGrecquesm[k]):
od:
k:='k':
NumérateursPartiels:=[LettresGrecques[1], LettresGrecques[2], seq(normal(subs(LettresGrecques[k], Lett
  ↪ resGrecques[k+1])), k=2..8)]:
seq(print(NumérateursPartiels[k]), k=1..nops(NumérateursPartiels));
```

$$\alpha = \frac{b}{A}$$

$$\beta = -\frac{bcA}{A-B}$$

$$\gamma = \frac{dB^2c}{(A-B)(B-C)}$$

$$\delta = \frac{edC^2}{(C-D)(B-C)}$$

$$\varepsilon = \frac{efD^2}{(D-E)(C-D)}$$

$$\zeta = \frac{fgE^2}{(E-F)(D-E)}$$

$$\eta = \frac{ghF^2}{(F-G)(E-F)}$$

$$\theta = \frac{hiG^2}{(G-H)(F-G)}$$

$$\iota = \frac{ijH^2}{(H-I)(G-H)}$$

Faisons donc :

```
> Choix:=[
  b=A,
  c=B-A,
  d=C-B,
  e=D-C,
  f=E-D,
  g=F-E,
  h=G-F,
  i=H-G,
  j=I-H]:
NumérateursPartiels:=normal(subs(Choix,NumérateursPartiels));

NumérateursPartiels := [\alpha = 1, \beta = A^2, \gamma = B^2, \delta = C^2, \varepsilon = D^2, \zeta = E^2, \eta = F^2, \theta = G^2, \iota = H^2]
```

& la fraction continue fera

```
> x=add(Termes(k),k=1..nops(TermesPremierType))+`&c.`;
x=Fcg(FCG,nops(FCG)-1):
subs([op(subs(Choix,sort(NumérateursPartiels))),op(Choix)],%);
Formule:=(rhs(%)): # Cette assignation est pour les exemples qui vont suivre.
```

$$x = \frac{1}{A + \frac{1}{-A + B + \frac{1}{C - B + \frac{1}{D - C + \frac{1}{E - D + \frac{1}{F - E + \frac{1}{G - H + \frac{1}{H - G + \frac{1}{I - H}}}}}}}}}} + \&c.$$

Exemple I.

Il s'agit de transformer en fraction continue la série infinie :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.$$

Pofons donc $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, \&c; \&$ comme la valeur de la série proposée $= \ln 2$, on aura :

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \frac{9}{1 + \frac{16}{1 + \frac{25}{1 + \&c.}}}}}}$$

Euler a directement posé la série proposée égale à $\ln 2$ car à l'article §123, Euler a déjà montré que :

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \&c.$$

Obtenons, avec Maple, la conversion de cette série en fraction continue :

```
> Liste:=[(LLatinesM[k]=k)$k=1..9];
ln(2)=subs(Liste,Formule);
```

```
Liste := [A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5, F = 6, G = 7, H = 8, I = 9]
```

$$\ln(2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \frac{9}{1 + \frac{16}{1 + \frac{25}{1 + \frac{36}{1 + \frac{49}{1 + \frac{64}{1 + \frac{81}{1}}}}}}}}}}$$

Exemple II.

Qu'il s'agisse de transformer en fraction continue la série infinie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.$ dans laquelle π exprime la circonférence d'un cercle dont le diamètre 1.

En substituant pour A, B, C, D, &c. les nombres 1, 3, 5, 7, &c., on aura :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \&c.}}}}}$$

& en renversant la fraction,

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \&c.}}}}}$$

Expression que Brouncker a donnée le premier pour la quadrature du cercle (Euler fait ici référence à la réponse du vicomte William Brouncker à John Wallis sur la formule qu'il lui avait soumise pour $\square = \frac{4}{\pi}$. Cette réponse de Brouncker a été publiée en 1656 dans son *Arithmetica infinitorum*.)

Avec Maple, nous obtenons la conversion suivante :