La valeur absolue… vous connaissez ?

Pierre Lantagne
Enseignant retraité

29 mai 2022

Résumé

Ce document s'adresse particulièrement aux étudiants et aux étudiantes du cégep désirant combler leurs lacunes dans la résolution d'équations et d'inéquations qui contiennent des valeurs absolues. Suivant les démonstrations des principales propriétés de la valeur absolue, il est présenté plusieurs exemples détaillés de résolutions d'équations et d'inéquations renfermant des valeurs absolues.

Distance entre deux points

En géométrie plane, on définit la distance entre deux points A et B comme étant la longueur du segment de droite joignant ces deux points,

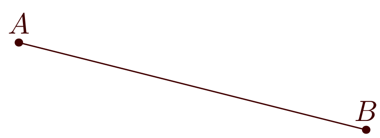


FIG. 1 – Segment $\overline{AB}$ dans un plan géométrique

On note cette distance $d(A,B)$ et sa valeur correspond à la mesure du segment $\overline{AB}$, soit $m\overline{AB}$.

Postulats (Distance entre deux points). Soient deux points P_1 et P_2 d'un plan géométrique. On admet que toute définition de la distance entre ces deux points doit vérifier les postulats suivants :

1. $d(P_1,P_2) = 0$ si et seulement si P_1 et P_2 coïncident ;
2. $d(P_1,P_2) > 0$ et seulement si $P_1 \neq P_2$;
3. $d(P_1,P_2) = (P_2,P_1)$.

Soit trois points distincts P_1, P_2 et P_3 d'une même droite d'un plan géométrique ; on admet encore les postulats suivants :

4. $d(P_1,P_3) = d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3)$ si et seulement si P_2 et entre P_1 et P_3 ;
5. $d(P_1,P_3) < d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3)$ si et seulement si P_2 n'est pas entre P_1 et P_3.

Sans trop savoir comment s'y prendre géométriquement pour déterminer **exactement** cette distance (une règle graduée ne peut que donner une approximation de la longueur), la distance est une valeur positive et elle correspond aussi bien à la mesure du segment $\overline{AB}$ qu'à la mesure du segment $\overline{BA}$:

$$d(A,B) = d(B,A)$$

La figure 2 nous rappelle que dans un plan géométrique, la distance $d(A,B)$ peut être obtenue grâce la la relation de Pythagore,

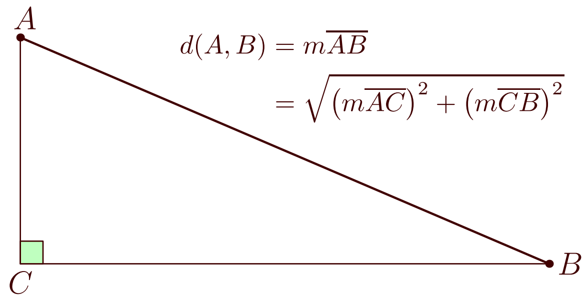


FIG. 2 – Triangle rectangle $\triangle ACB$

L'idée féconde que Descartes amena avec les axes de coordonnées a permis de passer de la géométrie plane à la géométrie analytique. De mettre ainsi en bijection un plan géométrique avec $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}\}$ permet de décrire de manière analytique les objets géométriques, les angles et les distances,

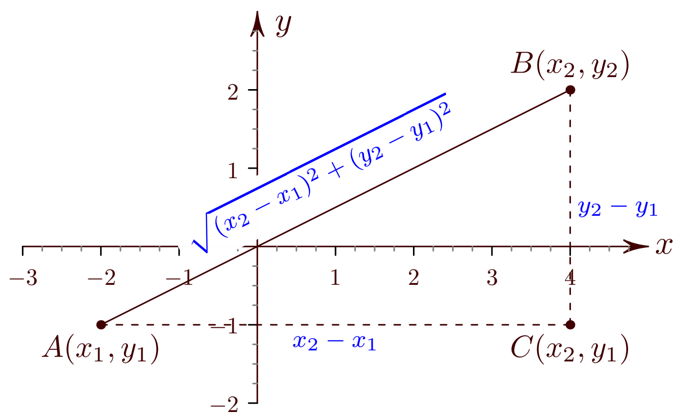


FIG. 3 – Triangle rectangle $\triangle ACB$

Dans FIG. 3, afin que le calcul de $x_2 - x_1$ correspond bien à une valeur positive, on doit s'assurer que x_2 soit l'abscisse du point le plus à droite et que x_1 soit celui du point le plus à gauche. Il faut s'assurer aussi que y_2 soit l'ordonnée du point le plus haut et y_1, celui du point le plus bas afin que le résultat de $y_2 - y_1$ soit une valeur positive.

Maintenant, considérons la figure 4.

En appliquant la relation de Pythagore, il faut s'assurer que la mesure de chaque cathète soit positive. Dans cette figure, la $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Or, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-(y_2 - y_1))^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Désignons par $\Delta x \geq 0$ et par $\Delta y \geq 0$ la longueur respective de chaque cathète. Ainsi on peut poser

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

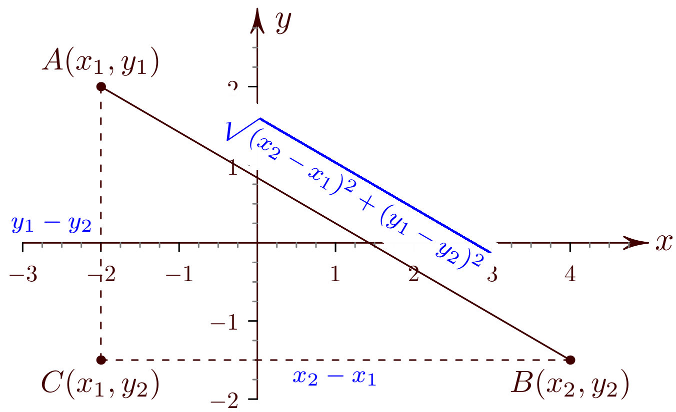


FIG. 4 – Triangle rectangle $\triangle ACB$

Selon la position relative des points A et B, il est clair que

$$\begin{aligned}\Delta y = \max\{y_2 - y_1, y_1 - y_2\} &= \begin{cases} y_2 - y_1 & \text{si } y_2 > y_1 \\ 0 & \text{si } y_2 = y_1 \\ y_1 - y_2 & \text{si } y_2 < y_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} y_2 - y_1 & \text{si } y_2 > y_1 \\ 0 & \text{si } y_2 = y_1 \\ -(y_2 - y_1) & \text{si } y_2 < y_1 \end{cases}\end{aligned}$$

Idem pour Δx.

Nous noterons

$$\max\{\Delta y, -\Delta y\} = |\Delta y|$$

Vous pouvons alors poser l'égalité suivante.

$$d(A,B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

La notation «valeur absolue» $|\,|$ est une notation algébrique importante en mathématique.

Définition (Valeur absolue). Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. La valeur absolue de a, notée $|a|$ est simplifiée par

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Distance analytique sur la droite réelle

Considérons la distance $d(O,P)$ entre l'origine $O(0)$ et le point $P(x)$. Selon les postulats précédents, cette distance est une valeur positive. Comme le segment unité OI est contenu x fois dans le segment OP, il est naturel de poser $d(O,P) = x$.

Sur la FIG. 5(a), $x > 0$ et nous avons bien que $d(O,P) > 0$,

(a) Le point P, $x > 0$ (b) Le point P, $x < 0$

FIG. 5 – Distance sur la droite réelle

Sur la FIG. 5(b), $x < 0$, le segment unité $\overline{OI}$ est contenu non pas x, mais $-x$ fois dans le segment $\overline{OP}$. Pour respecter les postulats, nous devons écrire $d(O,P) = -x$. Bref, dans tous les cas

$$d(O,P) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

On conclut ceci

$$d(O,P) = m\overline{OP} = |\,x\,|$$

Notons que nous pouvons écrire

$$d(O,P) = m\overline{OP} = |\,x - 0\,|$$

Considérons maintenant la distance entre deux points quelconques $P_1(x_1)$ et $P_2(x_2)$. Par un raisonnement similaire au précédent, nous déduisons facilement que

$$d(P_1,P_2) = d(P_2,P_1) = m\overline{P_1P_2} = m\overline{P_2P_1} = |\,x_2 - x_1\,| = |\,x_1 - x_2\,|$$

Définition (Distance entre deux points). La distance entre deux points $P_1(x_1)$ et $P_2(x_2)$ est la valeur réelle non négative donnée par

$$m\overline{P_1P_2} == m\overline{P_2P_1} = |\,x_2 - x_1\,|$$

Cette définition est analytique parce qu'elle porte sur des nombres x_1 et x_2, qui sont les abscisses de P_1 et P_2. Puisque la droite des réels est une représentation graphique des nombres réels où on confond le nombre réel avec le point de la droite qui lui est associé, nous pouvons très bien formuler que

$$|\,x_2 - x_1\,| = \text{distance entre les nombres } x_1 \text{ et } x_2$$

En résumé,

(a) Le point P à gauche du point Q (b) [Le point Q à gauche du point P

FIG. 6 – Distance sur la droite réelle

Racine carrée d'un carré parfait

La notation $\sqrt{a}$ (racine carrée de a) n'a pas de sens si a est un réel strictement négatif ($a < 0$). En effet, par définition de la racine carrée d'un nombre, si le nombre $\sqrt{a}$ est bien défini il doit être l'unique nombre positif dont le carré donne a et, selon la règle des signes de la multiplication d'un nombre par lui-même, le produit est nécessairement positif et ne peut pas être négatif.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \text{ mais } \sqrt{a^2} \neq a$$

$\sqrt{a^2}$ est bien définie lorsque $a > 0$ ou $a < 0$ car $a^2 > 0$. Alors,

1er cas : si $a > 0$, alors $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

2ème cas : si $a < 0$, alors $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{(-a) \times (-a)} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$

La notation «valeur absolue» nous permet de simplifier correctement l'écriture de $\sqrt{a^2}$.

Définition (Racine carrée d'un carré parfait).
Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. La racine carrée $\sqrt{a^2}$ est simplifiée par

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Propriétés de la valeur absolue

Théorème (Propriétés de la valeur absolue).

1. $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x \times y| = |x| \times |y|$
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$
5. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
6. $|x| \geq x$
7. $|x+y| \leq |x| + |y|$
8. Si $a \geq 0$, $|x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$
9. $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$
10. Si $a \geq 0$, $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
11. Si $a \geq 0$, $|x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$

Preuve (Propriétés de la valeur absolue).

Soit x, y deux nombres réels quelconques.

1. $|x| = 0 \iff x = 0$

La preuve de ce qui nous semble évident n'est pas toujours facile à faire. L'intérêt de démontrer cette première propriété est de présenter un développement de preuve par l'absurde. Aussi, nous allons faire une seconde preuve directement sur la base des propriétés des nombres réels.

Pour faire la preuve de cette équivalence logique, nous devons faire la preuve de deux implications logiques

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \textit{ et } x = 0 \Rightarrow |x| = 0$$

$\Longrightarrow)$ Nous avons que $|x| = 0$. D'une part si $x > 0$ alors $|x| = x$ et donc $x = |x| > 0$. Supposer $x > 0$ nous amène à déduire que $|x| > 0$. Cela contredit le fait que $|x| = 0$. Donc que $x \ngtr 0$. D'autre part, si $x < 0$ alors $|x| = -x > 0$ et donc $|x| > 0$. Supposer $x < 0$ nous amène à déduire que $|x| > 0$. Cela contredit aussi le fait que $|x| = 0$. Donc que $x \nless 0$. Puisque ni $x \ngtr 0$ et que ni $x \nless 0$, nous avons nécessairement que $x = 0$.

$\Longleftarrow)$ Nous avons $x = 0$. Nous avons donc nécessairement $|x| = |0| = 0$.

Seconde preuve sur la base des propriétés des nombres réels :

$$|x| = 0 \iff \sqrt{x^2} = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

2. $|-x| = |x|$ Symétrie

$$|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

On a donc évidemment l'égalité $|x-y| = |y-x|$ car $y - x = -(x-y)$.

3. $|x \times y| = |x| \times |y|$ La valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues respectives.

$$|x \times y| = \sqrt{(x \times y)^2} = \sqrt{x^2 \times y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2} = |x| \times |y|$$

4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ La valeur absolue d'un quotient est égale au quotient des valeurs absolues respectives.

On pourrait faire un développement semblable au développement de la valeur absolue d'un produit mais nous allons plutôt appliquer directement la propriété du produit.

$$\text{Pour } y \neq 0,\ \ |x| = \left|\frac{x}{y} \times y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| \times |y|$$

Reste à isoler $\left|\dfrac{x}{y}\right|$ pour établir la proposition.

5. $|x^2| = |x|^2 = x^2$

$$\text{D'une part, } |x^2| = |x \times x| = |x| \times |x| = |x|^2$$

$$\text{D'autre part, } |x|^2 = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ (-x)^2 = x^2 & x < 0 \end{cases}$$

6. $|x| \geq x$

1^er^ cas : si $x \geq 0$, $x \geq x$ est une inégalité qui est vraie et puisque $x \geq x \Longleftrightarrow |x| \geq x$, l'inégalité $|x| > x$ est vrai.

2ème cas : si $x < 0$, $-x > x$ est une inégalité qui est vraie et puisque $-x > x \Longleftrightarrow |x| > x$, l'inégalité $|x| > x$ est vrai aussi dans ce cas.

7. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (L'inégalité du triangle)

1er cas : si $x+y \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} |x+y| &= x+y \\ &\leq |x| + |y| \quad \text{car } |x| \geq x \text{ et } |y| \geq y \end{aligned}$$

2ème cas : si $x+y < 0$, alors

$$\begin{aligned} |x+y| &= -x-y \\ &\leq |x| + |y| \quad \text{car } |x| = |-x| \geq -x \text{ et } |y| = |-y| \geq -y \end{aligned}$$

8. $|x| = a \Longleftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a \quad (a \geq 0)$

Nous devons donc montrer deux implications :

$$|x| = a \Longrightarrow x = a \text{ ou } x = -a \text{ et}$$
$$x = a \text{ ou } x = -a \Longrightarrow |x| = a$$

$\Longrightarrow$) Par hypothèse, nous avons que $|x| = a$.

1er cas : si $x \geq 0$, alors $|x| = x \Leftrightarrow a = x$

2ème cas : si $x < 0$, alors $|x| = -x \Leftrightarrow a = -x \Leftrightarrow -a = x$

Ce qui montre que $|x| = a \Longrightarrow x = a$ ou $x = -a$

$\Longleftarrow$) Pour $a > 0$, $x = a \Rightarrow |x| = |a| = a$ ou $x = -a \Rightarrow |x| = |-a| = -(-a) = a$,

9. $|x| = |y| \Longleftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$

La preuve sera directe en considérant tous les cas exhaustifs des valeurs de x et de y prises ensembles.

1er cas : $x \geq 0$ et $y \geq 0$, clairement $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$

2ème cas : $x \geq 0$ et $y < 0$, clairement $|x| = |y| \Leftrightarrow x = -y$

3ème cas : $x < 0$ et $y \geq 0$, clairement $|x| = |y| \Leftrightarrow -x = y \Leftrightarrow x = -y$

4ème cas : $x < 0$ et $y < 0$, clairement $|x| = |y| \Leftrightarrow -x = -y \Leftrightarrow x = y$

10. $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a \geq 0)$

1er cas : $x \geq 0$, clairement $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$

2ème cas : $x < 0$, clairement $|x| \leq a \Leftrightarrow -x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a$

Puisqu'à la fois $x \leq a$ et $x \geq -a$, nous pouvons résumé ces doubles inégalités avec la notation $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

11. $|x| \geq a \Longleftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a \quad (a \geq 0)$

1er cas : $x \geq 0$, clairement $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$

2ème cas : $x < 0$, clairement $|x| \geq a \Leftrightarrow -x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$

Mise en garde (À propos de la racine carrée d'un nombre)

La *racine carrée* d'un nombre a est définie comme étant **le nombre positif** b tel que $b^2 = a$. Il découle immédiatement de la règle des signes pour la multiplication que a ne peut qu'être positif, $a \geq 0$.

La notation radicale $\sqrt{\ }$ est utilisée pour désigner ce nombre b : $\sqrt{a} = b$. Par exemple, c'est donc erroné d'écrire $\sqrt{49} = \pm 7$. En effet, on ne peut accepter que la notation numérique $\sqrt{49}$ désigne à la fois deux valeurs distinctes.

Mais qu'en est-il de la valeur -7 ? Même si $(-7)^2 = 49$, -7 n'est pas la racine carrée de 49 parce que -7 ne satisfait pas la définition de la racine carrée d'un nombre. Il est possible que la confusion qui s'installe et qui perdure chez de nombreux élèves vient de la résolution de l'équation $x^2 = 49$ (par exemple) où intervient à la dernière étape la racine carrée pour isoler x.

$$\begin{aligned} x^2 &= 49 \\ x &= \pm 7 \end{aligned}$$

Parce que le niveau d'étude où est présenté ce type d'équation à résoudre, la notion de valeur absolue n'a pas encore été introduite et en conséquence, l'élève a retenu que la racine carré de x^2 est x d'une part, et d'autre part, qu'il y a bien deux nombres 7 et -7 dont le carré donne 49, donc qu'ils sont deux racines de 49, perdant de vue qu'ils sont en fait, deux racines de l'équation $x^2 = 49$. De même que le niveau d'étude ne permettait pas non plus de faire intervenir la factorisation d'une différence de deux carrés parfaits et la loi du produit nul.

$$\begin{aligned} x^2 &= 49 \\ x^2 - 49 &= 0 \\ (x-7)(x+7) &= 0 \end{aligned}$$

Dans un cas comme dans l'autre, le manque de rigueur mathématique (intrinsèque au niveau d'étude) dans les étapes de la résolution de $x^2 = 49$ explique la confusion entretenue entre la racine carré d'un nombre et les racines d'une équation. Maintenant, disposant de la notion «valeur absolue», il faut privilégier les étapes suivantes lorsqu'on fait intervenir la racine carrée de chaque membre :

$$\begin{aligned} x^2 &= 49 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{49} \\ |x| &= 7 && \text{Voir définition de } \sqrt{a^2} \text{ à la page 5} \\ x &= 7 \text{ ou } x = -7 && \text{Propriété 8} \end{aligned}$$

Résolution des équations

Nous allons appliquer les propriétés de la valeur absolue dans la résolution de quelques exemples d'équations. Nous allons nous rendre compte que cela nécessitera parfois une analyse de l'équation avant de procéder à la réécriture de la notation valeur absolue.

Exemple 1

Résoudre l'équation $|x-2|=6$.

Solution proposée :

$$\begin{aligned} |x-2|=6 &\iff x-2=6 \text{ ou } x-2=-6 \qquad \text{Propriété 8}\\ &\iff x=8 \text{ ou } x=-4 \end{aligned}$$

Exemple 2

Résoudre l'équation $|3x-2|=-6$.

Solution proposée :

Cette équation n'a évidemment pas de racines : E.S. $=\emptyset$. Par définition de la valeur absolue, la valeur est non négative : quelque soit x, $|3x-2|\geq 0$. (On ne peut pas appliquer la propriété 8 comme à l'exemple précédent car il faut que $a\geq 0$).

Exemple 3

Résoudre l'équation $|x+3|=|3x-2|$.

Solution proposée :

$$\begin{aligned} |x+3|=|3x-2| &\iff x+3=3x-2 \quad \text{ou} \quad x+3=-(3x-2) \qquad \text{Propriété 9}\\ &\iff 5=2x \quad \text{ou} \quad x+3=-3x+2\\ &\vdots \end{aligned}$$

E.S. $=\left\{\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right\}$

Exemple 4

Résoudre l'équation $|(x-3)(x+4)|=0$.

Solution proposée :

$$\begin{aligned} |(x-3)(x+4)|=0 &\iff (x-3)(x+4)=0 \qquad \text{Propriété 1}\\ &\iff x-3=0 \quad \text{ou} \quad x+4=0 \quad \text{Loi du produit nul dans } \mathbb{R}\\ &\vdots \end{aligned}$$

E.S. $=\{3,-4\}$

Exemple 5

Résoudre l'équation $\sqrt{(3x-4)^2}=3$.

Solution proposée :

$$\begin{aligned} \sqrt{(3x-4)^2}=3 &\iff |3x-4|=3 \qquad \text{Définition 2}\\ &\iff 3x-4=3 \quad \text{ou} \quad 3x-4=-3 \quad \text{Propriété 8}\\ &\vdots \end{aligned}$$

E.S. $=\left\{\frac{1}{4},\frac{7}{3}\right\}$

Exemple 6

Résoudre l'équation $|\,2x+3\,|+|\,(x-7)(2x+3)\,|=0$.

Solution proposée :

En vertu des propriétés des nombres réels, la somme de deux quantités positives est nulle lorsque chacune de ces quantités est nulle.

$$\begin{aligned}
|\,2x+3\,|+|\,(x-7)(2x+3)\,|=0 &\Longleftrightarrow |\,2x+3\,|=0 \quad \text{et} \quad |\,(x-7)(+x+3)\,|=0 && \text{Propriété dans } \mathbb{R}\\
&\Longleftrightarrow 2x+3=0 \quad \text{et} \quad (x-7)(2x+3)=0 && \text{Propriété 1}\\
&\Longleftrightarrow 2x+3=0 \quad \text{et} \quad [(x-7)=0 \ \text{ ou } \ (2x+3)=0] && \text{Propriété dans } \mathbb{R}\\
&\Longleftrightarrow x=-\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \left[x=7 \ \text{ ou } \ x=-\frac{3}{2}\right] && \text{Propriété dans } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Seule la valeur $-\frac{3}{2}$ rend vraie la conjonction, c'est-à-dire qu'avec cette unique valeur nous avons à la fois $|\,2x+3\,|=0$ et $|\,(x-7)(+x+3)\,|=0$.

E.S. $=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Autre solution :

Nous remarquons qu'en appliquant la propriété 3 (Valeur absolue d'un produit), il sera possible de factoriser $|\,2x+3\,|$ et alors obtenir un produit de facteurs nuls.

$$\begin{aligned}
|\,2x+3\,|+|\,(x-7)(2x+3)\,|=0 &\Longleftrightarrow |\,2x+3\,|+|\,x-7\,|\times|\,2x-3\,|=0\\
&\Longleftrightarrow |\,2x+3\,|(1+|\,x-7\,|)=0
\end{aligned}$$

Le facteur $(1+|\,|x-7\,|\,|)$ ne s'annule jamais quelque soit x car $|\,x+7\,|$ ne peut jamais valoir -1. Tandis que la facteur $|\,2x+3\,|$ s'annule lorsque $x=-\frac{3}{2}$.

Exemple 7

Modifions légèrement l'équation de l'exemple précédent. Résoudre $|\,2x+3\,|+|\,(x-7)(2x+3)\,|=5$.

Solution proposée :

L'équation à résoudre est plausible. Il est possible que la somme de deux nombres positifs soit positif. La mise en évidence effectuée à l'exemple 6 était pertinente car cela nous amenait à évoquer la propriété d'un produit nul dans $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas ici. Avec ou sans mise en évidence, nous ne pouvons que simplifier les valeurs absolues seulement sur la base de la définition 1.

Commençons par l'étude du signe de $2x+3$: $y=2x+3$ une droite de pente positive qui coupe l'abscisse en $x=-\frac{3}{2}$. Donc, si $x<-\frac{3}{2}$, $2x-3<0$ et si $x\geq-\frac{3}{2}$, $2x-3\geq 0$.

Poursuivons ensuite avec l'étude du signe de $(x-7)(2x+3)=2x^2-11x-21$: $y=2x^2-11x-21$ est une parabole ouverte vers le haut puisque le coefficient de x^2 est positif. Puisque $\Delta=(-11)^2-4(2)(-21)=289>0$, cette parabole coupe l'abscisse en deux points distincts et est strictement négative entre ces deux points et positive ailleurs. Ces deux points ont comme abscisse les racines de la parabole. Les racines sont $\frac{11\pm\sqrt{289}}{4}$, soit $x_1=-\frac{3}{2}$ et $x_2=7$. Donc, si $-\frac{3}{2}<x<7$, $2x^2-11x-21<0$. $2x^2-11x-21\geq 0$ si $x\geq-\frac{3}{2}$ et si $x\leq 7$.

Complétons un tableau de simplification (TAB. 1) mettant en évidence les domaines de simplification de l'équation à résoudre.

Nous devons considérer trois domaines de simplification de l'équation $|\,2x+3\,|+|\,(x-7)(2x+3)\,|=5$. Soit $x<-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}<x<7$ et $x>7$.

$$|\,2x+3\,|+|\,(x-7)(2x+3)\,|=5 \iff \begin{cases} 2x^2-13x-29=0 & \text{si } x<-\frac{3}{2} \qquad (1)\\ -2x^2+13x+19=0 & \text{si } -\frac{3}{2}<x<7 \qquad (2)\\ 2x^2-9x-23=0 & \text{si } x>7 \qquad (3)\end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		7		$+\infty$
Simplification de $\lvert 2x-3 \rvert$		$-2x+3$	0	$2x+3$	17	$2x+3$	
Simplification de $\lvert (x-7)(2x+3) \rvert$		$(-x+7)(-2x+3)$	0	$(-2x+7)(2x+3)$	0	$(2x+3)(x-7)$	
Simplification de $\lvert 2x+3 \rvert + \lvert (x-7)(2x+3) \rvert$		$2x^2-13x-24$	0	$-2x^2+13x+24$	0	$2x^2-9x-18$	

TAB. 1 – Tableau de simplification de $|2x+3|+|(x-7)(2x+3)|$

(1) . Les racines de $2x^2-13x-29=0$ sont $x_1=\dfrac{13-\sqrt{401}}{4}, x_2=\dfrac{13+\sqrt{401}}{4}$ où $x_1\approx-1,756$ et $x\approx 28,256$.
On retiendra seulement la valeur $\dfrac{13-\sqrt{401}}{4}$.

(2) . Les racines de $-2x^2+13x+19=0$ sont $x_1=\dfrac{13-\sqrt{321}}{4}$ et $x_2=\frac{13+\sqrt{321}}{4}$ où $x_1\approx 1,229$ et $x_2\approx 7,729$.
On retiendra seulement la valeur $\dfrac{13-\sqrt{321}}{4}$.

(3) . Les racines de $2x^2-9x-23=0$ sont $x_1=\dfrac{9-\sqrt{265}}{4}$ et $x_2=\dfrac{9+\sqrt{265}}{4}$ ou $x_1\approx-1,820$ et $x_2\approx 6,320$
Aucune de ces deux valeurs n'est à retenir.

TAB. 1 montre clairement que lorsque $x=-\frac{3}{2}$ ou $x=7$, l'équation à résoudre n'est pas vérifiée.

E.S.=$\left\{\dfrac{13-\sqrt{401}}{4},\dfrac{13-\sqrt{321}}{4}\right\}$

Exercices (Résolution d'équations)

1. Résoudre chaque équations.

a. $|-x|=1$ b. $|x+1|=2x-3$ c. $\left|x^2+x+1\right|=1$ d. $|1-x|\,|1-x|=9$

e. $|x-2|=|3-5x|$ f. $2\left|x+\frac{3}{2}\right|+\left|3x-\frac{5}{4}\right|=9$ g. $\sqrt{|2x-3|}=|x+1|$ h. $|5x-3|-5=\sqrt{4x+5}$

2. Le signe (signum) d'un nombre x (abréviation $\operatorname{sgn}(x)$ est définie comme suit :

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

a. Trouver $\operatorname{sgn}(-2)$, $\operatorname{sgn}(-5)$, $\operatorname{sgn}(0)$, $\operatorname{sgn}(3)$ et $\operatorname{sgn}(101)$.

b. Montrer que $|x|=x\operatorname{sgn}(x)$

c. Montrer que $\operatorname{sgn}(ab)=\operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)$

3. Montrer que si $\neq 0$, $\dfrac{x}{|x|}-\dfrac{|x|}{x}=0$.

4. Il est prouvé que $\left|x^2\right|=x^2$. Peut-on prouver que $\left|x^3\right|=x^3$?

5. Attention, ne pas être leurrer par l'égalité $|-a| = a$. Pour quels nombres réels de a cette égalité est-elle vraie ? Pour quels nombres est-elle fausse ?

Résolution des inéquations

Ici aussi, nous allons appliquer les propriétés de la valeur absolue dans la résolution de quelques exemples d'inéquations. Nous allons nous rendre compte que cela nécessitera parfois une relative analyse de l'inéquation avant de procéder à la réécriture de l'énoncé en cause sans la notation valeur absolue.

Exemple 8

Résoudre l'inéquation $|2x-7| < 6$.

Solution proposée :

$$\begin{aligned} |2x-7| < 6 &\iff -6 < 2x-7 < 6 \qquad \text{Propriété 10} \\ &\iff -1 < 2x < 13 \\ &\iff -\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2} \end{aligned}$$

E.S. $= \left]-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right[$

Exemple 9

Résoudre l'inéquation $|3x+2| \geq 5$.

Solution proposée :

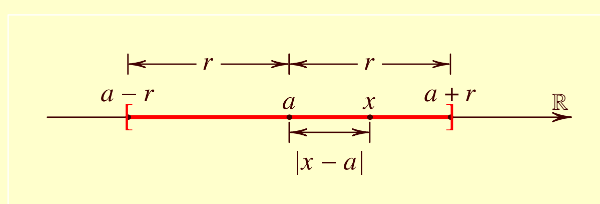
$$\begin{aligned} |3x+2| > 5 &\iff 3x+2 \geq 5 \text{ ou } 3x+2 \leq -5 \qquad \text{Propriété 11} \\ &\iff x \geq 1 \text{ ou } x \leq -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

E.S. $= \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [1, \infty[$

Important (À retenir: Interprétation de $|x| \leq r$ et $|x-a| \leq r$)

Soit a, b et r trois nombres réels où $r \geq 0$. Puisque $|x-a|$ mesure la distance entre les réels x et a, $|x-a| \leq r$ signifie que, sur la droite réelle, la distance de x à a est inférieure à r.

$$\begin{aligned} |x-a| \leq r &\iff a-r \leq x \leq a+r \\ &\iff x \in [a-r\,; a+r] \end{aligned}$$



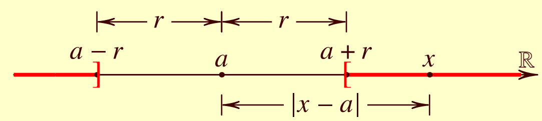
Pour l'inégalité $|2-5x| \leq 7$, nous avons

$$\begin{aligned} |2-5x| \leq 7 &\iff \left|-5\left(x-\frac{2}{5}\right)\right| \leq 7 \\ &\iff \left|x-\frac{2}{5}\right| \leq \frac{7}{5} \end{aligned}$$

où nous déduisons directement l'intervalle $\left[-1; \frac{9}{5}\right]$

Nous avons aussi la distance de x à a supérieure à r.

$$\begin{aligned} |x-a| \geq r &\Longleftrightarrow x-a \geq r \text{ ou } x-a \leq -r \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\, a-r\right] \cup \left[a+r\,;\, +\infty\right[\end{aligned}$$



Pour l'inégalité $|2-5x| \leq 7$, nous avons

$$\begin{aligned} |1-2x| \geq 6 &\Longleftrightarrow \left| -2\left(x-\frac{1}{2}\right) \right| \geq 6 \\ &\Longleftrightarrow \left| x-\frac{1}{2} \right| \geq 3 \end{aligned}$$

où nous déduisons directement l'intervalle $\left]-\infty\,;\, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}\,;\, \infty\right[$

Exemple 10

Résoudre l'inéquation $\sqrt{4x^2-16x+16} \leq 8$.

Solution proposée :

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2-16x+16} \leq 8 &\Longleftrightarrow \sqrt{4(x-2)^2} \leq 8 \\ &\Longleftrightarrow 2\,|x-2| \leq 8 \\ &\Longleftrightarrow |x-2| \leq 4 \\ &\Longleftrightarrow -4 \leq x-2 \leq 4 \\ &\Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

E.S. $= [-2, 6]$

Exemple 11

(Modifions légèrement l'exemple précédent de telle manière que le radicande ne soit pas un carré parfait.)

Résoudre l'inéquation $\sqrt{4x^2-8x+16} \leq 8$.

Solution proposée :

Il faut s'assurer que le radicande soit positif. Puisque $\Delta = 64-256 < 0$, le trinôme $4x^2-8x+16$ n'a pas de racines (réelles) et sa valeur est toujours positive car le signe du coefficient de x^2 est positif.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2-8x+16} \leq 8 &\Longleftrightarrow \left(\sqrt{4x^2-8x+16}\right)^2 \leq 8^2 \\ &\Longleftrightarrow 4x^2-8x-48 \leq 0 \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $4x^2-8x-48$ sont $r_1 = 1-\sqrt{13}$ et $r_2 = 1+\sqrt{13}$ et le signe de ce trinôme est négatif pour les valeurs de x comprises entre ses racines (le signe du coefficient de x^2 est positif) et le trinôme est nul lorsque $x = r_1$ ou $x = r_2$.

E.S. $= \left[1-\sqrt{13}, 1+\sqrt{13}\right]$

Remarque. Nous avons posé une équivalence lors de l'élévation au carré, car nous sommes assurés que le radicande représente une valeur positive et donc $\sqrt{4x^2-8x+16} \geq 0$.

Exemple 12

Résoudre l'inéquation $|3x-2| \leq |2x+1|$.

Solution proposée :

Simplifions cette inégalité sur la base de la définition de la valeur absolue. Commençons par l'étude du signe de $3x-2$: $y = 3x-2$ une droite de pente positive qui coupe l'abscisse en $x = \frac{2}{3}$. Donc, si $x < \frac{2}{3}$, $3x-2 < 0$ et si $x \geq \frac{2}{3}$, $3x-2 \geq 0$.

Maintenant, l'étude du signe de $2x+1$: $y = 2x+1$ une droite de pente positive qui coupe l'abscisse en $x = -\frac{1}{2}$. Donc, si $x < -\frac{1}{2}$, $2x+1 < 0$ et si $x \geq -\frac{1}{2}$, $2x+1 \geq 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Simplification de $|3x-2|$		$-3x+2$	$\frac{7}{2}$	$-3x+2$	0	$3x-2$	
Simplification de $|2x+1|$		$-2x-1$	0	$2x+1$	$\frac{7}{3}$	$2x+1$	
Simplification de $|3x-2| \leq |2x+1|$		$-3x+2 \leq -2x-1$ $x \geq 3$		$-3x+2 \leq 2x+1$ $x \geq \frac{1}{5}$		$3x-2 \leq 2x+1$ $x \leq 3$	

TAB. 2 – Tableau de simplification de $|3x-2| \leq |2x+1|$

Complétons un tableau (TAB. 2) pour voir clairement les domaines de simplification des inéquations à résoudre.

1$^{\text{er}}$ domaine : Le domaine de simplification étant $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, il n'y a aucun élément $x \geq 3$. Donc $E.S._1 = \emptyset$

2$^{\text{ème}}$ domaine : Le domaine de simplification étant $\left]-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, tous les nombres de ce domaine supérieurs à $\frac{1}{5}$ satisfont l'inégalité $x \geq 3$. Donc $E.S._2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right[$

3$^{\text{ème}}$ domaine : Le domaine de simplification étant $\left]\frac{2}{3}, \infty\right[$, tous les nombres de ce domaine inférieurs à 3 satisfont l'inégalité $x \leq 3$. Donc $E.S._3 = \left]\frac{2}{3}, 3\right]$

Le tableau 2 montre qu'avec $x = -\frac{1}{2}$, l'inégalité à résoudre est fausse tandis qu'avec $x = \frac{2}{3}$ elle est vérifiée.

D'où $E.S. = E.S._1 \cup E.S._2 \cup E.S._3 \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} = \left[\frac{1}{5}, 3\right]$.

Exemple 12 bis

Est-ce que l'élévation au carré de chaque membre d'une égalité préserve l'inégalité ? En général, la réponse est non. Par exemple, $-2 < 1$ mais $(-2)^2 \not< 1^2$. Par contre, c'est le cas lorsque l'inégalité ne comporte que des valeurs positives : si $a > 0$ et $b > 0$, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Il vous sera demandé en exercice de justifier les étapes la preuve.

Nous allons résoudre à nouveau l'inégalité de l'exemple 12 : $|3x-2| \leq |2x+1|$ mais, la résolution sera développée sur la base de l'équivalence

$$|x| < |y| \Longleftrightarrow x^2 < y^2$$

Alors,

$$\begin{aligned}|3x-2| < |2x+1| \iff & \quad (3x-2)^2 < (2x-1)\\ \iff & \; 9x^2-12x+4 < 4x^2+4x+1\\ \iff & \; 5x^2-16x+3 < 0\\ \iff & (5x-1)(x-3) < 0\end{aligned}$$

Puisque $y = 5x^2-16x+3$ est une parabole concave vers le haut, $5x^2-16x+3 < 0$ entre ses racines, soit pour $x \in \left]\frac{1}{5};3\right[$. Lorsque $x = \dfrac{1}{5}$ ou $x = 3$, l'égalité $|3x-2| = |2x+1|$ est vérifiée.

D'où $E.S. = \left[\dfrac{1}{5},3\right]$.

Exemple 13

Un dernier exemple pour la route.

Résoudre l'inéquation $|3-2x|+|4+x| \geq 11$.

Solution proposée :

Simplifions cette inégalité sur la base de la définition de la valeur absolue. Commençons par l'étude du signe de $3-2x$: $y = 3-2x$ une droite de pente négative qui coupe l'abscisse en $x = \frac{3}{2}$. Donc, si $x < \frac{3}{2}$, $3-2x > 0$ et si $x \geq \frac{3}{2}$, $3-2x \leq 0$.

Maintenant, l'étude du signe de $4+x$: $y = 4+x$ une droite de pente positive qui coupe l'abscisse en $x = -4$. Donc, si $x < -4$, $4+x < 0$ et si $x \geq -4$, $4+x \geq 0$.

Complétons un tableau (TAB. 3) pour voir clairement les domaines de simplification des inéquations à résoudre.

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Simplification de $\lvert 3-2x\rvert$		$3-2x$	11	$3-2x$	0	$2x-3$	
Simplification de $\lvert 4+x\rvert$		$-4-x$	0	$4+x$	$\frac{7}{3}$	$4+x$	
Simplification de $\lvert 3-2x\rvert+\lvert 4+x\rvert \geq 11$		$-3x-1 \geq 11$ $x \leq -4$		$-x+7 \geq 11$ $x \leq -4$		$3x+1 \geq 11$ $x \geq \frac{10}{3}$	

TAB. 3 – Tableau de simplification de $|3-2x|+|4+x| \geq 11$

1er domaine : Le domaine de simplification étant $]-\infty,-4[$, tous les nombres de ce domaine sont $x \leq -4$. Donc $E.S._1 =]-\infty,-4]$

2ème domaine : Le domaine de simplification étant $\left[-4,\dfrac{3}{2}\right[$, dans ce domaine, -4 seul satisfait $x \leq -4$. Donc $E.S._2 = -4$

3ème domaine : Le domaine de simplification étant $\left]\dfrac{3}{2},\infty\right[$, tous les nombres de ce domaine supérieurs ou égaux à $\frac{10}{3}$ satisfont l'inégalité $x \geq \frac{10}{3}$. Donc $E.S._3 = \left[\dfrac{10}{3},\infty\right[$

Le tableau 3 montre qu'avec $x = -4$, l'inégalité à résoudre est vraie tandis qu'avec $x = \frac{3}{2}$ elle est fausse.
D'où $E.S. = E.S._1 \cup E.S._2 \cup E.S._3 =]-\infty, -4] \cup \left[\frac{10}{3}, \infty\right[$.

Exercices (Résolutions d'inéquations)

1. Résoudre chaque équations.
   a. $|2x-6| \leq 8$ b. $|x-1|-|x-3| \geq 6$ c. $|x-1|+|x-3| \geq 6$ d. $|1-x||1-x| = 9$
   e. $|x-2| = |3-5x|$ f. $|3x-7| \geq x+2$ g. $1 \leq |2x+1| < 3$ h. $\begin{cases} |x-3| > 2 \\ |x+4| \leq 3 \end{cases}$
   i. $|2x+3|-|3x-2| \leq 0$ j. $x^2+3x+2 \geq |x-1|$ k. $\left|x^2+3x+2\right| \leq x+1$
2. Utiliser les propriétés de la valeur absolue pour démontrer la véracité de chaque énoncé ci-dessous.
   a. $|x-y| \leq |x|+|y|$ b. $|x-y| \geq |x|-|y|$ c. $||x|-|y|| \geq |x-y|$ d. $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$
3. Si $0 < k < 1$, résoudre pour x l'inégalité $\left|\frac{1}{x}-1\right| < k$. (Ne pas oublier de conditionner les valeurs de x pour que l'inégalité soit plausible)
4. Compléter la preuve de $|x| < |y| \iff x^2 < y^2$ en justifiant clairement chacune des étapes.

   $\Longrightarrow$) Par hypothèse, nous avons que $|x| < |y|$.

$$\begin{aligned} |x| < |y| &\Longrightarrow |x||x| < |x||y| \text{ et } |x||y| < |y||y| \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &\Longrightarrow |x|^2 < |y|^2 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &\Longrightarrow x^2 < y^2 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

   Ce qui montre que $|x| < |y| \Longrightarrow x^2 < y^2$

   $\Longleftarrow$) Par hypothèse, nous avons que $x^2 < y^2$.

$$\begin{aligned} x^2 < y^2 &\Longrightarrow |x|^2 < |y|^2 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &\Longrightarrow |x|^2 - |y|^2 < 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &\Longrightarrow ((|x|-|y|)(|x|+|y|)) < 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &\Longrightarrow |x|-|y| < 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &\Longrightarrow |x| < |y| \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

   Ce qui montre que $x^2 < y^2 \Longrightarrow |x| < |y|$
5. Sachant que $0 < |a| < |b| \Rightarrow \frac{1}{|b|} < \frac{1}{|a|}$ et à l'aide de l'inégalité du triangle, justifier la séquence des inégalités suivantes :
$$\left|\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{|x|+2}\right| \leq \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$
6. Montrer que (Voir exercice précédent)
$$\left|\frac{x-2}{x^2+9}\right| \leq \frac{|x|+2}{9}$$