Chapitre XVIII : Des Fractions continues

Le dernier chapitre (chapitre XVIII) du premier tome de son *Introductio in analysin infinitorum*, Euler l'a intitulé *De fractionibus continuis*. Pour la première fois dans l'histoire des mathématiques et ce, dans le cadre d'un manuel mathématique, on expose une approche analytique élémentaire aux fractions continues et à certaines de leurs propriétés. En introduction, Euler entrevoit lucidement que les fractions continues seront un apport important en analyse infinitésimale :

> *§356. Après avoir traité aſſez au long dans les Chapitres précédents des ſéries infinies, & des produits composés de facteurs infinis, il convient de dire un mot d'une troiſieme eſpece de formules infinies, que donnent les diviſions ou fractions continues. Car quoique cette partie ait été peu cultivée juſqu'à préſent, je ne doute pas que l'uſage n'en devienne très-grand dans l'analyſe infinitéſimale. Quelques eſſais que j'en ai faits m'autoriſent à le croire. Cette théorie ne laiſſera pas d'être particulièrement d'un aſſez grand ſecours pour l'Arithmétique & l'Algebre ordinaire ; c'eſt ce que je me propoſe d'expoſer & d'expliquer en peu de mots dans ce Chapitre.*
>
> L. Euler — *Introductio in analyſin infinitorum (Lauſanne 1748)*
> §356 à la page 277 dans la traduction française de J.B. Labey

Dans ce chapitre, Euler introduit le lecteur aux fractions continues. Donnant d'abord la définition d'une fraction continue simple et généralisée, **laquelle fraction continue pourrait être finie ou être prolongée à l'infini**.

> *§357. J'appelle fraction continue une fraction dont le dénominateur eſt compoſé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier & une fraction formée de la même maniere que les précédentes, ainſi de ſuite, ſoit qu'il y ait un nombre infini de fractions, ſoit qu'il n'y en ait qu'un nombre fini.*
>
> *Telles ſont les expreſſions ſuivantes :*
>
> $$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\&c.}}}}} \qquad \text{ou} \quad a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\&c.}}}}}$$

Article §358. *Après avoir ainſi donné la forme des fractions continues, voyons d'abord comment on peut obtenir leur valeur ſous la forme ordinaire. Pour faciliter cette recherche, allons, par degrés, & interrompons la ſuite : d'abord à la premiere, enſuite à la ſeconde, puis à la troiſieme fraction ; cela poſé, il eſt clair qu'on aura*

$$a = a$$

$$a+\frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{abc+a+c}{bc+1}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}} = \frac{abcde+abe+ade+cde+abc+a+c+e}{bcde+be+de+bc+1}$$

&c.

À l'article §359. Euler donne une disposition des numérateurs partiels pour mettre en évidence la manière dont chaque fraction partielle peut-être déduite systématiquement des précédentes.

Quoique dans ces fractions ordinaires, on ne reconnoiſſe pas facilement la loi ſuivant laquelle le numérateur & le dénominateur ſont compoſés des lettres $a,b,c,d,$&c. *cependant, avec un peu d'attention, on pourra découvrir comment chaque fraction dérive des précédentes. En effet, chaque numérateur eſt la ſomme du dernier numérateur multiplié par une nouvelle lettre & de l'avant-dernier numérateur ſimple ; & la même loi ſ'obſerve pour les dénominateurs. Ayant donc écrit par ordre les lettres* $a,b,c,d,$&c. *on en formera facilement les fractions, de cette manière :*

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+a+c}{bc+1}; & \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d} \end{array}$$

Chaque numérateur ſe trouve en multipliant le dernier par la lettre qui eſt écrite au-deſſus de celui-ci, & en ajoutant au produit de l'avant-dernier. Il en eſt de même des dénominateurs ; mais pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans la loi, j'ai écrit à la tête la fraction $\frac{1}{0}$*, qui, quoiqu'elle ne dérive pas de la fraction continue, eſt propre pourtant à rendre plus ſenſible la loi de la progreſſion. Au reſte, chaque fraction exprime la valeur de la fraction continue en ſuppoſant qu'elle ait été continuée incluſivement juſqu'à la lettre écrite au-deſſus du terme qui précède.*

Cette « loi » de la progression énoncée par Euler de manière rhétorique, c'est exactement la récurrence donnée par la PROPOSITION 3 à la page 62 pour obtenir la k^e réduite d'une fraction continue simple. C'est ce que nous avons transposé en une procédure Maple que nous avons appelé `Principales`.

À l'article §360., Euler poursuit avec les réduites d'une fraction continue généralisée.

On obtiendra ſemblablement pour l'autre formule des fractions continues, ſavoir :

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\&c.}}}}}$$

les réſultats ſuivants, ſelon le nombre de termes qu'on prendra,

$$\begin{aligned}
&a &&= a \\
&a+\cfrac{\alpha}{b} &&= \frac{ab+\alpha}{b} \\
&a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}} &&= \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta} \\
&a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}} &&= \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\
&a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e}}}} &&= \frac{abcde+\delta abc+\gamma abe+\beta ade+\alpha cde+\beta\delta a+\alpha\delta c+\alpha\gamma e}{bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta} \\
& &&\&c.
\end{aligned}$$

(Nous avons ajouté une réduite supplémentaire aux quatre réduites données dans son texte par Euler.)

Chacune de ces fractions ſe trouvera au moyen des deux précédentes, comme on le voit ici :

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}; & \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

À l'article §361., Euler énonce la récurrence pour la formation de ces fractions (réduites) : *Pour former ces fractions, écrivez au-deſſus les indices* a, b, c, d, &c. *écrivez encore la première fraction* $\frac{1}{0}$, *& la ſeconde* $\frac{a}{1}$ *; vous aurez alors chacune des ſuivantes en multipliant le numérateur de la dernière par l'indice ſupérieur, & celui de l'avant-dernière par l'indice inférieur correſpondant ; la ſomme de ces produits ſera le numérateur de la fraction demandée. De même le dénominateur ſera formé du produit du dénominateur précédent par l'indice ſupérieur, & de celui de l'avant-dernier par l'indice inférieur ; & et chaque fraction trouvée de cette maniere donnera la valeur de la fraction continue, en ſuppoſant qu'on l'ait continuée incluſivement juſqu'au dénominateur qui eſt écrit au-deſſus de la fraction précédente.*

La règle progressive d'obtention des réduites a déjà été énoncée antérieurement par Euler dans son mémoire *De fractionibus continuis diſſertation*. Nous allons considérer plus loin dans le texte les 35 articles de ce mémoire et c'est à l'article §7. de la page 181 que nous allons transposer cette règle d'obtention des réduites d'une fraction continue généralisée en une procédure Maple que nous appellerons `RéduitesRègleEuler`. D'ici là, les réduites d'ordre k seront obtenues par simplification avec la requête `value(Fcg(L,k))`.

```
> FCG:=[a,[1,b],[1,c],[1,d],[1,e],[1,f]]:
  Fcg(FCG,5);
```

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f}}}}}$$

```
> seq(print(Fcg(FCG,k)=normal(value(Fcg(FCG,k)))),k=0..4);
```

$$a=a$$

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+a+c}{bc+1}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}=\frac{abcde+abc+abe+ade+cde+a+c+e}{bcde+bc+be+de+1}$$

```
> FCG:=[a,[alpha,b],[beta,c],[gamma,d],[delta,e],[varepsilon,f]];
  Fcg(FCG,5);
```

$$FCG := [a,[\alpha,b],[\beta,c],[\gamma,d],[\delta,e],[\varepsilon,f]]$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f}}}}}$$

```
> seq(print(Fcg(FCG,k)=normal(value(Fcg(FCG,k)))),k=0..4);
```

$$a=a$$

$$a+\frac{\alpha}{b}=\frac{ab+\alpha}{b}$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}=\frac{abc+a\beta+\alpha c}{bc+\beta}$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}}=\frac{abcd+ab\gamma+a\beta d+\alpha cd+\alpha\gamma}{bcd+b\gamma+\beta d}$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e}}}}=\frac{abcde+abc\delta+abe\gamma+a\beta de+\alpha cde+a\beta\delta+\alpha c\delta+\alpha e\gamma}{bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta}$$

À l'article §362., Euler expose certaines caractéristiques intrinsèques des fractions continues finies et infinies. Dans le cas d'une fraction continue finie, la dernière réduite est *la vraie valeur de la fraction continue* tandis que les réduites précédentes approcheront de plus en plus cette valeur et *donneront par conséquent une approximation très-suffisante*. Euler explique clairement que ces approximations successives se font par excès et par défaut *quand même la fraction continue serait prolongée à l'infinie.*

Donc, si l'on poursuit la formation de ces fractions jusqu'à ce que la fraction continue ne fournisse plus d'indices, la derniere fraction, qu'on obtiendra, donnera la vraie valeur de la fraction continue. Les fractions précédentes approcheront de plus en plus cette valeur, & donneront par conséquent une approximation très-suffisante. En effet, supposons la vraie valeur de la fraction continue

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\&c.}}}}} \qquad \text{est} = x$$

Il est évident que la premiere fraction $\frac{1}{0}$ *est plus grande que x; mais la seconde* $\frac{a}{1}$ *sera plus petite; la troisieme* $a+\frac{\alpha}{b}$ *sera de nouveau plus grande, & la quatrieme plus petite; ainsi, ces fractions seront alternativement plus grandes & plus petites que x. Au reste, il est clair que chaque fraction approche plus près la vraie valeur de x, qu'aucune des précédentes; d'où il suit qu'on peut, de cette maniere, avoir facilement & promptement la valeur approchée de x, quand même la fraction continue serait prolongée à l'infini, pourvu que les numérateurs* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *&c, ne croissent pas trop; mais si tous les numérateurs égalent l'unité, l'approximation ne peut manquer d'avoir lieu.*

Conversion d'une fraction continue généralisée en série alternée

Aux articles §363. et §364., Euler déduit facilement une manière de s'y prendre pour convertir une fraction continue en une *ſérie dont les termes ont alternativement des ſignes* $+$ *&* $-$ *lorſque le premier a manque.*

Pour faire mieux reſſentir comment on approche de la vraie valeur de la fraction continue, prenons les différences des fractions trouvées ci-deſſus. D'abord, en négligeant la premiere $\frac{1}{0}$*, la différence entre la ſeconde & la troiſieme* $=\frac{a}{b}$*; la quatrieme ſouſtraite de la troiſieme donne pour reſte* (différence) $\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$*, & la quatrieme ſouſtraite de la cinquieme donne* $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$*,* &c. *Ainſi la valeur de la fraction continue ſera repréſentée par une ſuite de la forme ordinaire, de maniere que* $x=a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-$ &c. ***ſérie qui ſera limitée, toutes les fois que la fraction continue ne ſe prolongera pas à l'infini****. Nous avons donc un moyen de convertir une fraction continue en une ſérie, dont les termes ont alternativement les ſignes* $+$ *&* $-$ *lorſque le premier a manque.*

En effet, ſoit

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\&c.}}}}}$$

on aura, par ce qui précède

$$x=\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\big(bcd+\beta d+\gamma b\big)\big(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta\big)}+\&\text{c.}$$

D'où il ſuit que ſi les numérateurs $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ &c. *ne croiſſent pas, ſi, par exemple, ils ſont égaux à l'unité, & que les dénominateurs* $a,b,c,d,$&c.. *ſoient des nombres entiers quelconques poſitifs, la valeur de la fraction continue ſera donnée par une ſérie très-convergente.*

La procédure Maple suivante `FcgVersSérie` effectue la conversion d'une fraction continue en série. Chaque terme de rang $k\geq 2$ de la série est obtenu en soustrayant la réduite d'ordre k à la réduite d'ordre $k-1$. Le premier argument est la fraction continue en notation de Pringstein. Le second argument est le nombre de fractions partielles de la fraction continue à convertir. Si ce nombre est supérieur au nombre total de fractions partielles de la fraction continue, un message d'erreur s'affichera.

```
> FcgVersSérie:=proc(L::list,n::posint)
   local i,k,S,Signe,Termes;
   Termes:=[(op(1,L),seq(normal(value(Fcg(L,k))-value(Fcg(L,k-1))),k=1..nops(L)-1))];
   S:= map(`%+`,op(1..n+1,Termes));
   ifelse(op(1,S)=0,subs(op(1,S)=NULL,S),S);
  end proc:
```

```
> F:=[0,[alpha,b],[beta,c],[gamma,d],[delta,e],[varepsilon,f]];
  x=Fcg(F,5);
  x=FcgVersSérie(F,5);
  F:='F':
```

$$F:=[0,[\alpha,b],[\beta,c],[\gamma,d],[\delta,e],[\varepsilon,f]]$$

$$x=\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f}}}}}$$

$$x=\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{(bc+\beta)\,b}+\frac{\alpha\gamma\beta}{(bcd+b\gamma+\beta d)\,(bc+\beta)}-\frac{\alpha\gamma\beta\delta}{(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)\,(bcd+b\gamma+\beta d)}$$
$$+\frac{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon}{(bcdef+bcd\varepsilon+bc\delta f+bef\gamma+\beta def+b\gamma\varepsilon+\beta d\varepsilon+\beta\delta f)\,(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)}$$

Note : Dans la fenêtre Maple précédente, nous avons ajouté un cinquième terme au développement qu'a donné Euler dans son *Introductio* à la page 300 de la version latine.

Exemple numérique pour illustrer cette procédure :

```
> Liste:=[0,[1,1],[1,1],seq([k^2,1],k=2..8)];
  Fcg(Liste,9)=FcgVersSérie(Liste,9);
  value(%);
```

$$Liste := [0,[1,1],[1,1],[4,1],[9,1],[16,1],[25,1],[36,1],[49,1],[64,1]]$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\cfrac{36}{1+\cfrac{49}{1+\cfrac{64}{1}}}}}}}}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$$

$$\frac{1879}{2520}=\frac{1879}{2520}$$

Pour que le lecteur puisse mieux entrevoir la règle de la formation des termes d'une telle série, notons que la procédure FcVersSérie permet d'obtenir autant de termes de la série que l'on voudra. Cette procédure nous sera très utile pour détailler ultérieurement plusieurs développements d'Euler.

Conversion d'une série alternée en fraction continue généralisée

Ayant mis en évidence qu'il est possible de transformer une fraction continue en série, Euler s'intéresse ensuite à la réciprocité (à l'article §365. et les suivants) : soit la manière de s'y prendre pour changer une série alternée en fraction continue.

$$x=A-B+C-D+E-F+G-H+I-J+\&c.$$

C'est une introduction plutôt aride aux fractions continues où Euler a estimé nécessaire de le faire ainsi. Cela lui permet alors de faire rapidement le pont entre les séries numériques qu'il a obtenues précédemment dans son ouvrage avec cette troisième espèce de formules infinies que sont les fractions continues. Sa proposition de conversion d'une série alternée de cette forme est plutôt difficile à suivre mais, en faisant intervenir Maple, les simplifications sont obtenues beaucoup plus rapidement et permettent de réduire substantiellement la longueur du développement *manu scriptus* d'Euler. Nous n'allons pas complètement suivre, étape par étape, les suppositions qui sont faites à l'article §366. et tout le travail algébrique qui s'en suit à l'article §367. Nous allons passer directement à l'article §368. où Euler, en choisissant les dénominateurs partiels, déduit une de ses propositions de conversion. Par contre, à l'Annexe A, on trouvera l'exposé *manu scriptus* d'Euler et donc, tout le détail minutieux de son travail déployé aux articles §366 et §367. À cette annexe, en détaillant longuement les différentes substitutions systématiques, on comprendra que le but d'Euler est de démontrer clairement que les simplifications peuvent toujours être ainsi faites afin d'obtenir la conversion de la série alternée en fraction continue.

Pour permettre de mieux dégager la généralisation de chaque règle de conversion donnée par Euler, nous allons étayer davantage le développement d'Euler par l'ajout de quatre fractions partielles :

$$[zeta, g], [eta, h], [theta, i], [iota, j]$$

Nous devons d'abord faire l'initialisation suivante :

```
> interface(imaginaryunit=ZZ):
  unprotect(gamma);
  unprotect(j);
  unprotect(D);
  unprotect(O);
```

De plus, pour les développements à venir, faisons les assignations suivantes des lettres latines minuscules et majuscules et des lettres grecques minuscules.

```
> LLatinesm:=[b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n];
  LLatinesM:=[A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,WW];
  LGrecquesm:=[alpha,beta,gamma,delta,varepsilon,zeta,eta,theta,iota];
```

$$LLatinesm := [b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n]$$

$$LLatinesM := A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, WW]$$

$$LGrecquesm := [\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota]$$

§365. Série $x = A - B + C - D + E - F + \&c.$

Cela posé, on pourra réciproquement changer en fraction continue une suite de termes qui ont alternativement des signes différents, ou trouver une fraction continue, dont la valeur soit égale à la somme de la série proposée. Par exemple si on a l'équation

$$x = A - B + C - D + E - F + \&\text{c.}$$

la comparaison de cette suite (sic) *avec les termes correspondants de la série qui représente la fraction continue donnera les égalités suivantes :*

$$\begin{array}{lll}
A = \dfrac{\alpha}{b}; & \text{d'où} & \alpha = Ab, \\
\dfrac{B}{A} = \dfrac{\beta}{bc + \beta}; & & \beta = \dfrac{Bbc}{A - B} \\
\dfrac{C}{B} = \dfrac{\gamma b}{bcd + \beta d + \gamma b}; & & \gamma = \dfrac{Cd(bc + \beta)}{b(B - C)} \\
\dfrac{D}{C} = \dfrac{\delta(bc + \beta)}{bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta}; & & \delta = \dfrac{De(bcd + \beta d + \gamma b)}{(bc + \beta)(C - D)} \\
 & \&\text{c.}. &
\end{array}$$

Les comparaisons formulées par Euler des rapports de deux termes consécutifs sont limitées aux égalités $A, \frac{B}{A}, \frac{C}{B}$ et $\frac{D}{C}$. Dans nos calculs, nous allons ajouter les rapports $\frac{E}{D}, \frac{F}{E}, \frac{G}{F}, \frac{H}{G}$ et $\frac{I}{H}$.

En conséquence, générons d'abord la série devant permettre les comparaisons :

```
> FCG:=[0,[LGrecquesm[k],LLatinesm[k]]$k=1..9];
  TermesPremierType:=[op(1..9,FcgVersSérie(FCG,9))]:
  Termes:=p->(-1)^(p+1)*LLatinesM[p]:
  x=sum(Termes(k),k=1..6)+`&c.`;
  x=sum(TermesPremierType[k],k=1..6)+`&c.`;
```

$$FCG := [0,[\alpha,b],[\beta,c],[\gamma,d],[\delta,e],[\varepsilon,f],[\zeta,g],[\eta,h],[\theta,i],[\iota,j]]$$

$$x = A-B+C-D+E-F+\&c.$$

$$x=\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{(bc+\beta)\,b}+\frac{\alpha\gamma\beta}{(bcd+b\gamma+\beta d)\,(bc+\beta)}-\frac{\alpha\gamma\beta\delta}{(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)\,(bcd+b\gamma+\beta d)}$$
$$+\frac{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon}{(bcdef+bcd\varepsilon+bc\delta f+bef\gamma+\beta def+b\gamma\varepsilon+\beta d\varepsilon+\beta\delta f)\,(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)}$$
$$-(\alpha\gamma\beta\delta\zeta\varepsilon)/((bcdefg+bcde\zeta+bcdg\varepsilon+bc\delta fg+befg\gamma+\beta defg+bc\delta\zeta+be\gamma\zeta+bg\gamma\varepsilon+\beta de\zeta+\beta dg\varepsilon$$
$$+\beta\delta fg)+\beta\delta\zeta)\,(bcdef+bcd\varepsilon+bc\delta f+bef\gamma+\beta def+b\gamma\varepsilon+\beta d\varepsilon+\beta\delta f))+\&c.$$

Établissons les comparaisons terme à terme :

```
> Rapport[1]:=Termes(1)=op(1,TermesPremierType):
  LettresGrecques[1]:=isolate(Rapport[1],LGrecquesm[1]):  #Pour affichage informatif
  for k from 2 to nops(TermesPremierType) do
   Rapport[k]:=-Termes(k)/Termes(k-1)=(-op(k,TermesPremierType))/op(k-1,TermesPremierType):
   LettresGrecques[k]:=factor(isolate(%,LGrecquesm[k])): #Pour affichage informatif
  od:
  k:='k':
  NumérateursPartiels:=[LettresGrecques[1],LettresGrecques[2],seq(normal(subs(LettresGrecques[k-1],Le
  ↪  ttresGrecques[k])),k=2..9)]:
  seq(print(Rapport[k]),k=1..nops(TermesPremierType)-3);
```

$$A=\frac{\alpha}{b}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\beta}{bc+\beta}$$

$$\frac{C}{B}=\frac{\gamma b}{bcd+b\gamma+\beta d}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{C}=\frac{\delta\,(bc+\beta)}{bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta}$$

$$\frac{E}{\mathrm{D}}=\frac{\varepsilon\,(bcd+b\gamma+\beta d)}{bcdef+bcd\varepsilon+bc\delta f+bef\gamma+\beta def+b\gamma\varepsilon+\beta d\varepsilon+\beta\delta f}$$

$$\frac{F}{E}=\frac{\zeta\,(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)}{bcdefg+bcde\zeta+bcdg\varepsilon+bc\delta fg+befg\gamma+\beta defg+bc\delta\zeta+be\gamma\zeta+bg\gamma\varepsilon+\beta de\zeta+\beta dg\varepsilon+\beta\delta fg+\beta\delta\zeta}$$

Isolons les numérateurs partiels dans chacun de ces rapports, soit les lettres grecques α, β, γ jusqu'au numérateur partiel ι. En les affichant pour information, on observera qu'à partir du numérateur partiel γ, tous les numérateurs partiels subséquents comportent des numérateurs partiels précédents.

Pour plus de lisibilité, nous n'afficherons que les sept premiers numérateurs partiels.

```
> seq(print(LettresGrecques[k]),k=1..nops(TermesPremierType)-2);
```

$$\alpha=Ab$$

$$\beta=\frac{Bbc}{A-B}$$

$$\gamma=\frac{Cd\,(bc+\beta)}{b\,(B-C)}$$

$$\delta = \frac{\mathrm{D}e\,(bcd+b\gamma+\beta d)}{(bc+\beta)\,(C-D)}$$

$$\varepsilon = \frac{Ef\,(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)}{(bcd+b\gamma+\beta d)\,(\mathrm{D}-E)}$$

$$\zeta = \frac{Fg\,(bcdef+bcd\varepsilon+bc\delta f+bef\gamma+\beta def+b\gamma\varepsilon+\beta d\varepsilon+\beta\delta f)}{(bcde+bc\delta+be\gamma+\beta de+\beta\delta)\,(E-F)}$$

$$\eta = \frac{Gh\,(bcdefg+bcde\zeta+bcdg\varepsilon+bc\delta fg+befg\gamma+\beta defg+bc\delta\zeta+be\gamma\zeta+bg\gamma\varepsilon+\beta de\zeta+\beta dg\varepsilon+\beta\delta fg+\beta\delta\zeta)}{(bcdef+bcd\varepsilon+bc\delta f+bef\gamma+\beta def+b\gamma\varepsilon+\beta d\varepsilon+\beta\delta f)\,(F-G)}$$

C'est alors qu'Euler s'emploie à de longues manipulations algébriques afin d'exprimer finalement tous les numérateurs partiels ne comportant seulement que les termes de la série et des dénominateurs partiels. C'est donc ici que l'on abrègera le développement original d'Euler qui nous permettra d'arriver plus rapidement à l'étape permettant de déduire la formule de conversion, soit l'étape où les numérateurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ peuvent être exprimés strictement en fonction des termes $A, B, C, D, \ldots$ de la série et des dénominateurs partiels a, b, c, d, … Par contre, on retrouvera intégralement le développement original d'Euler à l'Annexe A, page 293.

Pour y arriver aussi directement, nous avons déjà inclus dans l'avant-dernier bloc précédent de requêtes, les substitutions en cascade des numérateurs partiels avec lesquelles le mécanisme de la simplification automatique de Maple a pleinement joué son rôle…

```
> seq(print(sort(NumérateursPartiels[k])),k=1..nops(NumérateursPartiels));
```

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)\,(B-C)}$$

$$\delta = \frac{B\mathrm{D}de}{(C-\mathrm{D})\,(B-C)}$$

$$\varepsilon = \frac{CEef}{(\mathrm{D}-E)\,(C-\mathrm{D})}$$

$$\zeta = \frac{\mathrm{D}Ffg}{(E-F)\,(\mathrm{D}-E)}$$

$$\eta = \frac{EGgh}{(F-G)\,(E-F)}$$

$$\theta = \frac{FHhi}{(G-H)\,(F-G)}$$

$$\iota = \frac{GIij}{(H-I)\,(G-H)}$$

Les valeurs des numérateurs α, ϐ, γ, δ, &c. étant donc trouvées, les dénominateurs b, c, d, e, &c. reſtent arbitraires ; il convient ſeulement de les prendre tels qu'étant eux-mêmes des nombres entiers, ils donnent auſſi des nombres entiers pour α, ϐ, γ, δ, &c. ce qui dépend encore de la nature des nombres A, B, C, &c. ſuivant qu'ils ſont entiers ou fractionnaires. Suppoſons d'abord qu'ils ſoient entiers, on ſatiſfera à la condition demandée en faiſant :

```
> Choix:=[
   b=1,
   c=A-B,
   d=B-C,
   e=C-D,
   f=D-E,
   g=E-F,
   h=F-G,
   i=G-H,
   j=H-I]:
  subs(Choix,NumérateursPartiels);
```

$$[\alpha = A, \beta = B, \gamma = AC, \delta = BD, \varepsilon = CE, \zeta = DF, \eta = EG, \theta = FH, \iota = GI]$$

Par conſéquent, ſi :

```
> x=sum(Termes(k),k=1..9)-`&c.`;
```

$$x = A - B + C - D + E - F + G - H + I - \&c.$$

la même valeur de x pourra être exprimée par une fraction continue de cette maniere :

```
> x=Fcg(FCG,nops(FCG)-1):
  subs([op(subs(Choix,NumérateursPartiels)),op(Choix)],%);
```

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C + \cfrac{BD}{C - D + \cfrac{CE}{D - E + \cfrac{DF}{E - F + \cfrac{EG}{F - G + \cfrac{FH}{G - H + \cfrac{GI}{H - I}}}}}}}}}$$

§369. Série $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \frac{1}{F} + \&c.$

Mais ſi tous les termes de la ſérie ſont des nombres fractionnaires, de ſorte que

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \frac{1}{F} + \&c.$$

```
> FCG:=[0,[LGrecquesm[k],LLatinesm[k]]$k=1..9]:
  TermesPremierType:=[op(1..9,FcgVersSérie(FCG,9))]:
  Termes:=p->(-1)^(p+1)*1/LLatinesM[p]:
  x=sum(Termes(k),k=1..6)+`&c.`;
  x=sum(TermesPremierType[k],k=1..6)+`&c.`:
```

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \frac{1}{F} + \&c.$$

On aura pour α, ϐ, γ, δ, &c., les valeurs ſuivantes :

```
> Rapport[1]:=Termes(1)=op(1,TermesPremierType):
  LettresGrecques[1]:=isolate(Rapport[1],LGrecquesm[1]):
  for k from 2 to nops(TermesPremierType) do
   Rapport[k]:=Termes(k)/(-Termes(k-1))=(op(k,TermesPremierType))/(-op(k-1,TermesPremierType)):
   LettresGrecques[k]:=isolate(%,LGrecquesm[k]):
  od:
  k:='k':
  NumérateursPartiels:=[LettresGrecques[1],LettresGrecques[2],seq(normal(subs(LettresGrecques[k],Lett
  ↪  resGrecques[k+1])),k=2..8)]:
  seq(print(NumérateursPartiels[k]),k=1..nops(NumérateursPartiels));
```

$$\alpha = \frac{b}{A}$$

$$\beta = -\frac{bcA}{A-B}$$

$$\gamma = \frac{dB^2c}{(A-B)(B-C)}$$

$$\delta = \frac{edC^2}{(C-\mathrm{D})(B-C)}$$

$$\varepsilon = \frac{ef\mathrm{D}^2}{(\mathrm{D}-E)(C-\mathrm{D})}$$

$$\zeta = \frac{fgE^2}{(E-F)(\mathrm{D}-E)}$$

$$\eta = \frac{ghF^2}{(F-G)(E-F)}$$

$$\theta = \frac{hiG^2}{(G-H)(F-G)}$$

$$\iota = \frac{ijH^2}{(H-I)(G-H)}$$

Faiſons donc :

```
> Choix:=[
   b=A,
   c=B-A,
   d=C-B,
   e=D-C,
   f=E-D,
   g=F-E,
   h=G-F,
   i=H-G,
   j=I-H]:
  NumérateursPartiels:=normal(subs(Choix,NumérateursPartiels));
```

$$NumrateursPartiels := [\alpha = 1, \beta = A^2, \gamma = B^2, \delta = C^2, \varepsilon = \mathrm{D}^2, \zeta = E^2, \eta = F^2, \theta = G^2, \iota = H^2]$$

& la fraction continue ſera

```
> x=sum(Termes(k),k=1..nops(TermesPremierType))+`&c.`;
  x=Fcg(FCG,nops(FCG)-1):
  subs([op(subs(Choix,sort(NumérateursPartiels))),op(Choix)],%);
  Formule:=(rhs(%)): # Pour les exemples qui vont suivre
```

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}-\frac{1}{F}+\frac{1}{G}-\frac{1}{H}+\frac{1}{I}+\&c.$$

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A^2}{-A+B+\cfrac{B^2}{C-B+\cfrac{C^2}{D-C+\cfrac{D^2}{E-D+\cfrac{E^2}{F-E+\cfrac{F^2}{G-F+\cfrac{G^2}{H-G+\cfrac{H^2}{I-H}}}}}}}}}$$

Exemple I.

Il ſ'agit de tranſformer en fraction continue la ſérie infinie :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\&c.$$

Poſons donc $A=1$, $B=2$, $C=3$, $D=4$, &c ; & *comme la valeur de la ſérie propoſée* $=l\,2$, *on aura :*

$$l\,2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\&c.}}}}}}$$

Euler a directement poser la série proposée égale à $\ln 2$ car à l'article §123, Euler a déjà montré que :

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\&c.$$

Obtenons, avec Maple, la conversion de cette série en fraction continue :

```
> Liste:=[(LLatinesM[k]=k)$k=1..9];
  ln(2)=subs(Liste,Formule);
```

$$Liste:=[A=1,B=2,C=3,D=4,E=5,F=6,G=7,H=8,I=9]$$

$$\ln(2)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\cfrac{36}{1+\cfrac{49}{1+\cfrac{64}{1}}}}}}}}}$$

Exemple II.

Qu'il s'agiſſe de tranſformer en fraction continue la ſérie infinie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.$ *dans laquelle* π *exprime la circonférence d'un cercle dont le diamètre* 1.

En ſubſtituant pour A, B, C, D, &c. les nombres 1, 3, 5, 7, &c., on aura :

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.}}}}}$$

& en renverſant la fraction,

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.}}}}}$$

Expreſſion que Brouncker *a donnée le premier pour la quadrature du cercle (*en 1655*).*

Avec Maple, nous obtenons :

```
> ListeImpair:=[seq(2*k-1,k=1..9)]:
  Liste:=zip(`=`,LLatinesM,ListeImpair);
  Pi/4=subs(Liste,Formule);
```

$$Liste := [A = 1, B = 3, C = 5, D = 7, E = 9, F = 11, G = 13, H = 15, I = 17]$$

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \cfrac{121}{2 + \cfrac{169}{2 + \cfrac{225}{2}}}}}}}}}$$

```
> Prop1:=1/%:
  Prop1;
```

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \cfrac{121}{2 + \cfrac{169}{2 + \cfrac{225}{2}}}}}}}}}}$$

Ce n'est pas le résultat attendu de l'inverse de cette fraction continue mais il est bon : remarquez la première barre de division plus foncé. Le résultat précédent a bel et bien été renversé, mais pas automatiquement simplifié étant donné le premier quotient inactif à partir du haut de la fraction continue. Outre l'utilisation de la forme inactive de la division pour la mise en forme d'une fraction continue, il y a d'autres manières de s'y prendre pour différer le mécanisme de la simplification automatique de Maple. Une manière est de faire l'ajout d'un terme assignable (name) au dernier dénominateur partiel qui peut être choisi par l'usager : soit &., soit *etc.* ou soit …. Par exemple, une manière possible de s'y prendre est la suivante :

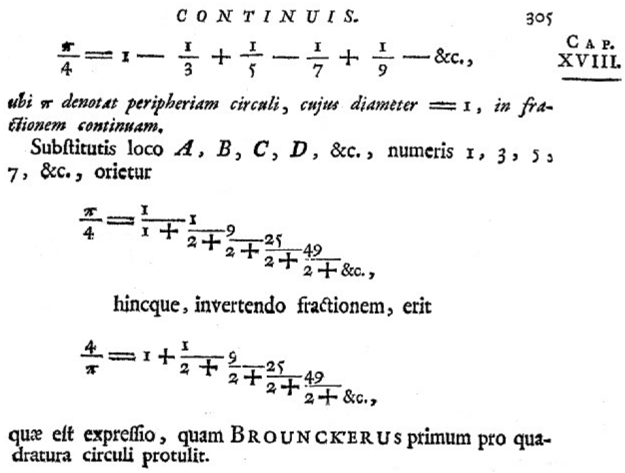
```
> Temp2:=subs(225%/2=225%/(2+`&c.`),Prop1):
  Temp2;
```

$$\frac{4}{\pi}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cfrac{121}{2+\cfrac{169}{2+\cfrac{225}{2+\&c.}}}}}}}}}}$$

Maintenant, faisons intervenir la simplification automatique :

```
> value(Temp2);
```

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cfrac{121}{2+\cfrac{169}{2+\cfrac{225}{2+\&c.}}}}}}}}$$


CONTINUIS. 305

CAP. XVIII.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\&c.,$$

ubi π denotat peripheriam circuli, cujus diameter = 1, in fractionem continuam.

Substitutis loco *A*, *B*, *C*, *D*, &c., numeris 1, 3, 5, 7, &c., orietur

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\&c.}}}}},$$

hincque, invertendo fractionem, erit

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\&c.}}}},$$

quæ est expressio, quam BROUNCKERUS primum pro quadratura circuli protulit.

Fig. 45 – *Exemple II du chapitre XVIII, à la page 305*

Avant le prochain exemple de conversion en fraction continue, voyons comment Euler s'y est pris pour déduire la série :

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\&c.$$

Dans son « *Introductio* », au chapitre VIII (§126, p.93 (version latine)) intitulé *De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis — Des Quantités tranſcendantes qui naiſſent du Cerle*, Euler énonce ceci :

Après la conſidération des logarithmes & des quantités exponentielles vient celle des arcs de cercle, & de leurs Sinus & Coſinus tant parce qu'ils forment une autre eſpece de quantités tranſcendantes, que parce qu'ils dérivent des quantités logarithmiques mêmes & des quantités exponentielles, lorſqu'elles renferment des imaginaires, ce qu'on verra plus clairement ci-après.

Suppoſons donc le rayon du cercle ou le ſinus total = 1, il paroît aſſez clair que la circonférence de ce cercle ne peut être exprimée exactement en nombres rationnels mais on a trouvé par approximation la demi-circonférence de ce cercle = ……………………………………………………

3,1415926535897932384626433832795028841971
6939937510582097494459230781640628620899
8628034825342117067982148086513272306647
0938446 +

Pour abréger j'écrirai π au lieu de ce nombre, de ſorte que $\pi =$ à la demi circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; ou π fera la longueur d'un arc de 180 degrés.

Pour Euler, il lui semble assez clair, sans en avoir la preuve, que le nombre π ne peut être exprimé en écriture décimale exacte comme celui d'un nombre rationnel et que la valeur donnée n'est donc qu'une approximation de la demi-circonférence de ce cercle. L'irrationalité de π a été démontrée ultérieurement par Johann Heinrich Lambert (1728-1777), dans ses *Mémoires de Berlin (1761)* ; mais on en trouvera une démonstration plus simple en appendice dans les *Éléments de Géométrie (1794)* d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833), dit le citoyen Legendre. Legendre y conjecture même la transcendance du nombre π.

À l'article §140 à la page 105, Euler explique comment il a obtenu ce résultat avec le développement en série de « ζ = *A tang. t* » ($\zeta = \arctan t$)

$$\zeta = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \&c.$$

Euler suppose ensuite un arc dont la tangente égale au rayon (unité). En considérant un arc $\zeta = \frac{\pi}{4}$, cela lui permet d'obtenir la série

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$$

qu'il attribue aussitôt la paternité à Leibnitz. On désigne aujourd'hui cette série par formule de Madhava, Gregory et Leibniz.

Par la suite, Euler expose comment il s'y est pris pour obtenir l'approximation de π qu'il a donnée avec 127 décimales exactes. Après quelques observations sur les inconvénients et les avantages de choisir un arc précis, Euler précise qu'il a fait les calculs avec un arc $\zeta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Selon Euler lui-même, c'est après un travail assez incroyable qu'il a obtenu cette approximation et puisque cela implique dans ce développement le nombre irrationnel $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, il a trouvé ce travail d'autant plus pénible (ce sont les mots employés par Euler lui-même).

Euler qualifie la série de Leibnitz d'à peine convergente (convergence lente dirait-on aujourd'hui). En effet, si nous calculons les 101 premiers termes de cette série, seul le premier chiffre après la virgule de π est exact.

```
> Série_Leibnitz:=Sum((-1)^n*(1/(2*n+1)),n=0..k);
  Pi/4=value(subs(k=100,Série_Leibnitz));
  4*lhs(%)= evalf(4*rhs(%));
```

$$Série\_Leibnitz := \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{20761299207627325789670879321196453428045592644025268689069691069221751411646755828901 47}{26351061627572364424958263030846984955655811155090408924128673587283907660990421098983 75}$$

$$\pi = 3.151493401$$

Avec Maple, convertissons π en fraction continue et calculons une réduite avec un nombre assez grand de fractions partielles pour montrer que la série de Leibnitz en fraction continue est aussi « peu convergente ». Alors :

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{11^2}{2+\ddots}}}}}}} \qquad \text{ainsi } \pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{11^2}{2+\ddots}}}}}}}$$

Obtenons la réduite d'ordre 101.

```
> Digits:=10:
  F:=[0,[4,1],seq([(2*k-1)^2,2],k=1..100)]:
  Pi=value(Fcg(F,101));
  ``=evalf(rhs(%));
  F:='F':
```

$$\pi=\frac{830451968305093031586835172847858137121823705761010747562787642768870056465870233156058 8}{2635106162757236442495826303084698495565581115509040892412867358728390766099042109898375}$$

$$3.151493401$$

Avec la réduite d'ordre 101, sans surprise évidemment, nous obtenons la même valeur précédente $\pi=3,151493401$ et donc, seul le premier chiffre après la virgule de π est exact.

Il y a d'autres développements de π en fractions continues généralisées qui présentent une certaine « régularité » :

$$\pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\cfrac{11^2}{6+\cfrac{13^2}{6+\ddots}}}}}}}=2+\cfrac{2}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cfrac{4\cdot 5}{1+\cfrac{5\cdot 6}{1+\cfrac{6\cdot 7}{1+\ddots}}}}}}}=2+\cfrac{4}{3+\cfrac{1\cdot 3}{4+\cfrac{3\cdot 5}{4+\cfrac{5\cdot 7}{4+\cfrac{7\cdot 9}{4+\cfrac{9\cdot 11}{4+\cfrac{11\cdot 13}{4+\ddots}}}}}}}$$

À l'article §142 (p.106), Euler expose aussi une manière astucieuse d'être « beaucoup plus convergente ». C'est en partageant l'arc $\frac{\pi}{4}=45°$ en deux arcs a et b où, $a+b=\frac{\pi}{4}$ via l'égalité

$$tang.(a+b)=1=\frac{tang.a+tang.b}{1-tang.a\,.\,tang.b}$$

De là, Euler obtient $1-tang.a\,tang.b=tang.a+tang.b$ et donc $tang.b=\dfrac{1-tang.a}{1+tang.a}$.

Soit maintenant tang.a $=\frac{1}{2}$ *; nous trouverons tang.b* $=\frac{1}{3}$ *; alors les deux arcs a & b seront exprimés par une série rationnelle beaucoup plus convergente que la précédente (*celle de Leibnitz*), & leur forme donnera la valeur de l'arc* $\frac{\pi}{4}$*. Donc*

$$\pi=4\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1.2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\frac{1}{7.2^7}+\frac{1}{9.2^9}-\&c.\\&\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.3^2}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}-\&c.\end{aligned}\right\}$$

Il suffit de calculer la somme des 11 premiers termes de chaque série pour montrer qu'Euler a effectivement raison. Cela permet d'obtenir sept décimales exactes.

```
> S1:=Sum((-1)^(n)/((2*n+1)*2^(2*n+1)),n=0..k):
  S2:=Sum((-1)^(n)/((2*n+1)*3^(2*n+1)),n=0..k):
  subs(k=10,4*(S1+S2));
  evalf(value(%));
```

$$4\left(\sum_{n=0}^{10}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,2^{2n+1}}\right)+4\left(\sum_{n=0}^{10}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^{2n+1}}\right)$$

$$3.141592670$$

C'est ainsi que se termine ce paragraphe et le chapitre VIII (page 107).

Remarque

Encore de nos jours, la manière très performante d'approcher la valeur de π passe par les séries.

Formule de Srinivasa Ramanujan énoncé au début du XX[e] siècle :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Cette formule donne 8 nouvelles décimales de π à chaque nouveau terme calculé.

Formule de David et Gregory Chudnovsky découverte en 1987 :

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

Cette formule donne 14 nouvelles décimales de π à chaque nouveau terme calculé.

Euler donne ensuite la conversion de deux autres séries infinies converties en fractions continues infinies dont l'une a été obtenue à l'article §178. Jusqu'à présent, il n'a pas été encore question pour Euler de convertir une fraction ordinaire en fraction continue. Euler aborde la question des fractions ordinaires seulement à partir de l'article §381 à la page 315.

E x e m p l e III.

Soit propoſée la ſérie infinie :

$$x=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\&c.$$

A cauſe de $A=m$; $B=m+n$; $C=m+2n$; *&c., elle ſe change en cette fraction continue,*

$$x=\cfrac{1}{m+\cfrac{mm}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\&c.}}}}}$$

Et avec Maple :

```
> Liste:=[(LLatinesM[k]=LLatinesm[12]+(k-1)*LLatinesm[13])$k=1..9];
  x=subs(Liste,Formule);
```

$$Liste := [A=m, B=m+n, C=m+2n, \mathrm{D}=m+3n, E=m+4n, F=m+5n, G=m+6n, H=m+7n, I=m+8n]$$

$$x=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\cfrac{(m+4n)^2}{n+\cfrac{(m+5n)^2}{n+\cfrac{(m+6n)^2}{n+\cfrac{(m+7n)^2}{n}}}}}}}}}$$

d'où l'on conclud, en renverſant,

```
> value(1/%)+(-m=-m);
```

$$\frac{1}{x}-m=\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\cfrac{(m+4n)^2}{n+\cfrac{(m+5n)^2}{n+\cfrac{(m+6n)^2}{n+\cfrac{(m+7n)^2}{n}}}}}}}}$$

E x e m p l e IV.

Nous avons trouvé auparavant (§178.) l'équation :

$$\frac{\pi\ cof.\frac{m\pi}{n}}{n\ fin.\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\&c.$$

Ainſi, nous aurons, pour former la fraction continue,

```
> Liste:=[seq(LLatinesM[k+1]=(k+(k mod 2))/2*n+(-1)^(k)*m,k=0..8)];
  (Pi*cos(m*Pi/n))/(n*sin(m*Pi/n))=subs(Liste,Formule);
```

$$Liste:=[A=m,B=n-m,C=m+n,D=2n-m,E=m+2n,F=3n-m,G=m+3n,H=4n-m,I=m+4n]$$

$$\frac{\pi\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)}{n\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{-2m+n+\cfrac{(n-m)^2}{2m+\cfrac{(m+n)^2}{n-2m+\cfrac{(2n-m)^2}{2m+\cfrac{(m+2n)^2}{n-2m+\cfrac{(3n-m)^2}{2m+\cfrac{(m+3n)^2}{n-2m+\cfrac{(4n-m)^2}{2m}}}}}}}}}$$

Comme nous pouvons le constater, jusqu'à présent, Euler propose la conversion en fraction continue infinie d'une série infinie obtenue précédemment sans son ouvrage. Il en est de même pour la série suivante :

§370. Série $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \frac{1}{ABCDEF} + \&c.$

S'il entre des facteurs continus dans la formation de la férie propofée ; qu'on ait, par exemple :

```
> FCG:=[0,[LGrecquesm[k],LLatinesm[k]]$k=1..9]:
  TermesPremierType:=[op(1..9,FcgVersSérie(FCG,9))]:
  Termes:=p->(-1)^(p+1)*1/product(LLatinesM[j],j=1..p):
  x=sum(Termes(k),k=1..6)+`&c.`;
  x=sum(TermesPremierType[k],k=1..6)+`&c.`:
```

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \frac{1}{ABCDEF} + \&c.$$

on aura les égalités fuivantes :

```
> Rapport[1]:=Termes(1)=op(1,TermesPremierType):
  LettresGrecques[1]:=isolate(Rapport[1],LGrecquesm[1]):
  for k from 2 to nops(TermesPremierType) do
   Rapport[k]:=Termes(k)/(-Termes(k-1))=(op(k,TermesPremierType))/(-op(k-1,  TermesPremierType)):
   LettresGrecques[k]:=isolate(%,LGrecquesm[k]):
  od:
  k:='k':
  NumérateursPartiels:=[LettresGrecques[1],LettresGrecques[2],seq(normal(subs(LettresGrecques[t],Lett
  ↪  resGrecques[t+1])),t=2..8)]:
  seq(print(NumérateursPartiels[t]),t=1..nops(NumérateursPartiels));
```

$$\alpha = \frac{b}{A}$$

$$\beta = \frac{bc}{B-1}$$

$$\gamma = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$$

$$\delta = \frac{dCe}{(D-1)(C-1)}$$

$$\varepsilon = \frac{Dfe}{(E-1)(D-1)}$$

$$\zeta = \frac{Efg}{(F-1)(E-1)}$$

$$\eta = \frac{Fgh}{(G-1)(F-1)}$$

$$\theta = \frac{Ghi}{(H-1)(G-1)}$$

$$\iota = \frac{Hij}{(I-1)(H-1)}$$

Soit donc :

```
> Choix:=[
   b=A,
   c=B-1,
   d=C-1,
   e=D-1,
```

```
 f=E-1,
 g=F-1,
 h=G-1,
 i=H-1,
 j=I-1]:
subs(Choix,NumérateursPartiels);
```

$$[\alpha=1,\beta=A,\gamma=B,\delta=C,\varepsilon=\mathrm{D},\zeta=E,\eta=F,\theta=G,\iota=H]$$

Il ſ'enſuivra que :

```
> x=sum(Termes(k),k=1..nops(TermesPremierType))+`&c.`;
  x=Fcg(FCG,nops(FCG)-1):
  subs([op(subs(Choix,sort(NumérateursPartiels))),op(Choix)],%);
  Formule:=(rhs(%)):  #Pour les exemples qui vont suivre
```

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}-\frac{1}{ABC\mathrm{D}}+\frac{1}{ABC\mathrm{D}E}-\frac{1}{ABC\mathrm{D}EF}+\frac{1}{ABC\mathrm{D}EFG}-\frac{1}{ABC\mathrm{D}EFGH}+\frac{1}{ABC\mathrm{D}EFGHI}+\&c.$$

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{\mathrm{D}-1+\cfrac{\mathrm{D}}{E-1+\cfrac{E}{F-1+\cfrac{F}{G-1+\cfrac{G}{H-1+\cfrac{H}{I-1}}}}}}}}}$$

E x e m p l e I.

En ſuppoſant que ***e*** *repréſente le nombre dont le logarithme = 1 ; nous avons trouvé auparavant*

$$\frac{1}{\boldsymbol{e}}=1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\&\text{c.}$$

ou :

$$1-\frac{1}{e}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\&\text{c.}$$

(Voir chapitre VII, Du Développement des Quantités exponentielles & logarithmiques en Séries, article §123. : $\boldsymbol{e}^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\&c.$. En posant $z=-1$, nous obtenons la série alternée qu'Euler a écrit avoir trouvé auparavant.)

Cette ſérie ſera changée en fraction continue (infinie)*, en faiſant :*

```
> Liste:=[(LLatinesM[k]=k) $k=1..9];
  Prop1:=1-1/exp(1)=subs(Liste,Formule):
  Prop1;
```

$$Liste:=[A=1,B=2,C=3,D=4,E=5,F=6,G=7,H=8,I=9]$$