$$a+\cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a}}}}}$$

Rappelons les cinq premières approximations que Bombelli a obtenues avec sa première méthode pour approcher $\sqrt{13}=\sqrt{3^2+4}$ à la page 46.

$$\frac{11}{3};\ \frac{18}{5};\ \frac{119}{33};\ \frac{393}{109};\ \frac{649}{180}$$

Avec la procédure Fcg, obtenons ces cinq réduites :

```
> F:=[a,[b,2*a]$5];
  Fcg(F,5);
```

$$F := [a,[b,2a],[b,2a],[b,2a],[b,2a],[b,2a]]$$

$$a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a}}}}}$$

```
> seq(subs([a=3,b=4],value(Fcg(F,k))),k=1..5);
```

$$\frac{11}{3},\frac{18}{5},\frac{119}{33},\frac{393}{109},\frac{649}{180}$$

En résumé, Bombelli n'a jamais formulé l'une ou l'autre de ses méthodes d'extraction de la racine carrée en termes de fractions continues ni implicitement, ni explicitement. Puisqu'il est possible, a posteriori, d'exprimer sa première méthode par des fractions continues, c'est ce qui explique, peut-être, que par le passé, certains lui ont attribué, à tort, le fait qu'il ait été à l'origine des fractions continues.

Nicolas Chuquet : Règle des nombres moyens

Certains historiens des mathématiques font même remonter les balbutiements des fractions continues jusqu'à Nicolas Chuquet. Comme nous le verrons plus loin, c'est à tort qu'ils le font également. Chuquet a inventé une méthode d'approximation de la racine carrée (pas seulement pour la racine carrée d'ailleurs, mais aussi pour les racines d'ordre n quelconque). Qui est Nicolas Chuquet ? Nicolas Chuquet, né probablement entre 1445 et 1455 à Paris et mort en 1488 à Lyon, est un mathématicien français. Arrivé à Lyon vers 1480, Nicolas Chuquet a rédigé en 1484 son œuvre majeure, écrite en français, *Triparty en la science des nombres*[17], qui ne fut jamais publiée de son vivant.

Son volume a été retrouvé en 1870 par Aristide Marre, soit environ 382 ans après sa mort. L'œuvre de Chuquet tout entier est composé de deux parties bien distinctes. La première partie étant le *Triparty en la Science des nombres* et la seconde, les *Applications des Rigles du Triparty* : §*Rigle des Premiers* (ou Algèbre), les §*Jeux et esbatemens qui par la science des nombres se font*, l'application de la science des nombres aux §*mesures de géométrie* et, pour finir, les applications §*au fait de marchandise*.

. . . Et ainsi a lonneur de la glorieuse t'nite se termine ce liure Lequel pour raison de ces troys parties generales Je lappelle tryparty. Et aussi pour cause quil a este | fait par Nicolas Chuquet parisien Bachelier en médecine Je le nomme le triparty de Nicolas en la science des nombres. Lequel fut cõmance medie et finy a lyon sus le Rosne Lan de salut .1484.

ℭExplicit. Deo gracias.

Le triparty en la sciences des nombres – Nicolas Chuquet, Parisien Bachlier en médecine
Manuscrit rédigé en 1484 mais redécouvert en 1870 par Aristide Marre, publié et commenté dans le Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche[57] *en 1880 puis imprimé en 1881*[58]

Dans un français contemporain [47], voici le début du chapitre « ℭLextraction des racines Imparfaictes » :

ℭComme il a été dit avant des nombres qui ne sont pas de vrais carrés en tant que d'eux on ne peut avoir de racine seconde précise. Car leurs racines multipliées par elle-mêmes montent toujours plus ou moins que le nombre dont elles sont racines. Et c'est pour cela qu'elles sont dites racines imparfaites dont leur extraction n'est que labeur sans utilité. Néanmoins pour la perfection de ce livre une manière de les chercher est mise aussi proche de la perfection qu'il est possible. Et pour rentrer dans la pratique, il convient de savoir que pour servir dans ce cas il y a deux sortes de progressions, celle qui progresse en augmentant comme $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ *etc. et celle qui progresse en diminution comme est* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ *etc.*

ℭAlors pour extraire toutes les racines imparfaites on peut faire de cette manière comme par exemple si on voulait extraire la racine seconde imparfaite de .6. Il convient de besogner d'abord de la manière précédente dite pour les nombres carrés en divisant les figures du nombre proposé de deux en deux tant qu'il y en a et négocier le plus ou le moins comme il est dit avant. Donc la racine de .6. est .2. car .2. fois .2. font .4. et il reste encore deux. Puisqu'ainsi .2. pour racine ne suffit pas pour approcher suffisamment de .6. Et aussi que celui qui prendrait .3. pour racine, il prendrait trop.

C'est au chapitre IV de la première partie de son ouvrage avec le paragraphe 7 que Chuquet aborde « *De la rigle des nombres moyens* » (p.101 du fonds français no. 1346) :

ℭCeste rigle sert a trouuver tant de nombres moyens entre deux nombres prochains que lon veult. Par le moyen dicelle se peuēt trouuer plusieurs nombres et faire mains calcules que par la rigle de troys ne par vne posicion ne par deux posicions ne se peuent trouuver . . . .
. . . . .
. . . Ainsi le nombre que Je quiers est entre .5.$\frac{3}{4}$*. et .5.*$\frac{4}{5}$*. Et pour Icellui trouuer Je adiouste numerateur auec numãteur et denoĩateur auec denoiate*^{r}*. Ainsi Jay .5.*$\frac{7}{9}$*. lesquelz multipliez en soy et adioustez avec .5.*$\frac{7}{9}$*. tout monte .39.*$\frac{13}{81}$*. qui est ce que Je demandoye. Et ainsi se termine la premiere partie de ce liure.*

Le triparty en la sciences des nombres – Nicolas Chuquet, Parisien
Manuscrit rédigé en 1484 mais redécouvert en 1870, publié dans le Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche puis imprimé en 1881

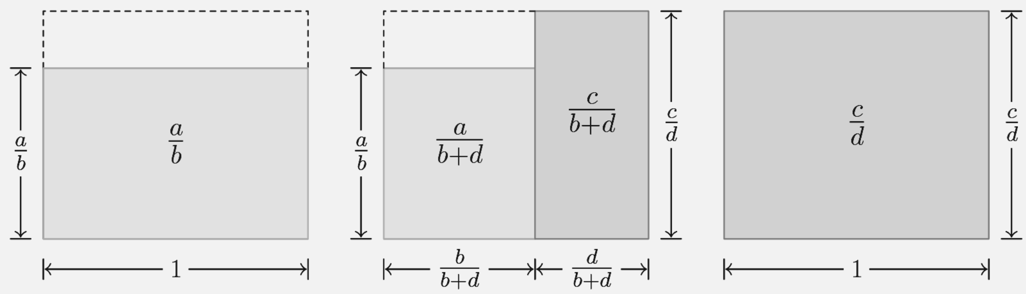
Chuquet a mis de l'avant la règle des nombres moyens sans s'appuyer clairement sur une démonstration.

Cette règle affirme, qu'entre deux fractions données $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on peut toujours insérer une troisième fraction, dite médiane, dont le numérateur résulte de la somme des numérateurs $(a+c)$ et dont le dénominateur est égal à la somme des dénominateurs $(b+d)$. Chuquet est l'inventeur la règle des nombres moyens et il a eu raison d'en faire usage pour approcher les racines des nombres *inparfai&tes*. C'est sans aucun doute l'expérience qui lui a toujours permis d'obtenir des résultats donnant à chaque fois une suite d'approximations successives s'approchant autant qu'il *demandoye*. La règle des nombres moyens est démontrable et nous allons en donner maintenant une preuve.

La preuve dont il sera question est celle d'une preuve sans mots (Proof without Words). « En mathématiques, une preuve sans mots (ou une démonstration visuelle) est une démonstration d'une identité (ou d'une affirmation mathématique plus générale) à l'aide d'un diagramme la rendant évidente, sans qu'un texte plus explicite le commentant soit nécessaire. Quand le diagramme n'en illustre qu'un cas particulier, il faut que sa généralisation ne demande au lecteur qu'un effort minimal. Malgré les risques qu'elles présentent, ces démonstrations sont souvent considérées comme plus élégantes que des preuves mathématiquement plus rigoureuses. » Source : < https://fr.wikipedia.org/wiki/Preuve_sans_mots >.

Preuve sans mots : Règle des Nombres Moyens

[Nicolas Chuquet, *Le Triparty en la Science des Nombres*, 1484]



$$a,b,c,d>0,\quad \frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b}<\frac{a}{b+d}+\frac{c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

Source : Roger B. Nelsen, *Mathematics Magazine*, Vol 67. No.1 (Fev., 1994). p. 34.
URL :< http://www.jstor.org/stable/2690552 >

Le résultat $\frac{a+c}{b+d}$ n'est évidemment pas le résultat de l'addition des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. Robert Ferreol, dans son article « Addition des cancres, suite de Brocot et friandises associées » (< http://mapage.noos.fr/r.ferreol/atelecharger/textes/brocot.pdf >), évoquent cette addition comme étant l'addition des cancres. Tout de même, une telle addition n'est pas dénuée d'intérêt car elle permet des études sérieuses. Par exemple, elle donne une façon simple d'énumérer tous les nombres rationnels positifs sous la forme d'un arbre (< https://zestedesavoir.com/articles/160/larbre-de-stern-brocot-enumeration-des-rationnels/?page=1 >).

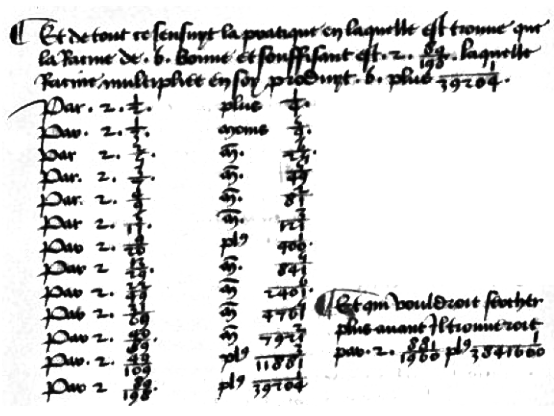


FIG. 41 – *Approximation de la ℞^{2}.6., manuscrit Triparty de Chuquet, page 53*

Chuquet s'est sans doute appuyé sur son expérience qui lui a toujours permis d'obtenir des résultats donnant à chaque fois une suite d'approximations successives s'approchant autant qu'il « *demandoye* ».

À la deuxième (seconde sic) partie, chapitre II, article 2 intitulé « *Extraction des racines imparfaictes* » Chuquet applique la règle des nombres moyens afin d'approcher la racine *n-ième* d'un nombre qui n'est pas une puissance *n-ième* exacte. La méthode proposée par Chuquet est en fait une méthode non systématique d'approximations successives. À chaque itération, il est nécessaire, à partir du résultat de l'addition des cancres, de bien choisir son encadrement afin de poursuivre avec la prochaine addition des cancres. À chaque itération, le nouvel encadrement n'est donc pas obtenu systématiquement.

Voyons maintenant comment Chuquet, dans son manuscrit, s'y prend pour approcher la valeur de la ℞.^{2}.6. ($\sqrt{6}$). Pour Chuquet, cet exemple tient lieu de la théorie de sa méthode. La méthode de la règle des nombres moyens consiste, pour chaque itération, à toujours encadrer la racine carrée à approcher par deux nombres afin de pouvoir appliquer cette règle. Par exemple, il est facile de se convaincre que la racine carrée de 6 est comprise entre les nombres 2 et 3 car $2^2 < 6 < 3^3$. En appliquant, la première fois la règle des nombres moyens avec l'encadrement $\frac{2}{1}$ et $\frac{3}{1}$, nous obtenons le nombre $\frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2}$. Il faut ensuite vérifier par calculs laquelle de ces deux possibilités 1 et $\frac{5}{2}$ ou $\frac{5}{2}$ et 3 encadre effectivement la racine carrée qu'on cherche afin d'appliquer de nouveau la règle des nombres moyens.

Nous avons que $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$, ce qui dépasse 6 de $\frac{1}{4}$ (plus $\frac{1}{4}$ comme Chuquet l'écrit), ce qui montre que $\frac{2}{1}$ et $\frac{5}{2}$ encadre la racine de 6 (ce qui exclus automatiquement l'autre possibilité). En appliquant la règle des nombres moyens avec cet encadrement, nous obtenons le nombre $\frac{2+5}{1+2} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Puisque $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = 5\frac{4}{9}$, soit $\frac{5}{9}$ inférieure à 6 (moins $\frac{5}{9}$), il nous faut considérer l'encadrement $\frac{7}{3}$ et $\frac{5}{2}$. La règle des nombres moyens donne $\frac{12}{5}$ dont le carré est $5\frac{19}{25}$, soit $\frac{6}{25}$ inférieur à 6 (moins $\frac{6}{25}$). D'où l'encadrement à retenir pour la prochaine itération est $\frac{12}{5}$ et $\frac{5}{2}$. L'application de la règle des nombres moyens donne $\frac{17}{7}$ dont le carré est $\frac{289}{49} = 5\frac{4}{49}$, soit $\frac{5}{49}$ inférieur à 6 (moins $\frac{5}{49}$).

Terminons ce développement en reproduisant telle quelle la fin de l'exemple donné par Chuquet.

... Et par ceste maniere peulx ꝓceder en adioustant le moins avec le plus ou le plus avec le moins Jusques a ce que lon sapꝓche bien pres de .6. vng petit plus ou vng petit moins et tant quil souffise. ℭEt doit on scauoir que tant plus lon continueroit par ceste maniē tant plus pres de .6. lon aspꝓcheroit. Mais Jamais on ne lattaindroit p̄cisemēt. | ℭEt de tout ce seusuyt la pratique en laquelle est trouue que la racine de .6. bonne et souffisant est .2.$\frac{89}{198}$. laquelle racine multipliee en soy produyt .6. plus $\frac{1}{39304}$.

Par. 2. $\frac{1}{2}$.	*plus*	$\frac{1}{4}$.
Par. 2. $\frac{1}{3}$.	*moins.*	$\frac{5}{9}$.
Par. 2. $\frac{2}{5}$.	*m̃.*	$\frac{6}{25}$.
Par. 2. $\frac{3}{7}$.	*m̃.*	$\frac{5}{49}$.
Par. 2. $\frac{4}{9}$.	*m̃.*	$\frac{2}{81}$.
Par. 2. $\frac{5}{11}$.	*m̃.*	$\frac{3}{121}$.
Par. 2. $\frac{9}{20}$.	*pl'*	$\frac{1}{400}$.
Par. 2. $\frac{13}{29}$.	*m̃.*	$\frac{5}{841}$.
Par. 2. $\frac{22}{49}$.	*m̃.*	$\frac{6}{2401}$.
Par. 2. $\frac{31}{69}$.	*m̃.*	$\frac{5}{4761}$.
Par. 2. $\frac{40}{89}$.	*m̃.*	$\frac{2}{7921}$.
Par. 2. $\frac{49}{109}$.	*plꝰ.*	$\frac{3}{11881}$.
Par. 2. $\frac{89}{198}$.	*plꝰ.*	$\frac{1}{36204}$.

ℭEt celui qui vouldroit sercher plus autant Il trouueroit par .2. $\frac{881}{1960}$ plꝰ $\frac{1}{3341600}$.

Au paragraphe suivant, Chuquet donne un tableau des résultats de la racine carrée des entiers qui sont « Imparfaictes » de 2 jusqu'à 14 (les racines carrées de 2 et de 6 y sont omises, car elles ont déjà été obtenues). Ces racines sont toutes des approximations par excès sauf pour la racine carrée de 10 dont l'approximation est aussi donnée par défaut. On pourra en faire facilement la vérification avec la procédure Maple `Chuquet` donnée un peu plus bas.

℄Encores cy apres sont mises les racines Imparfaictes de plusieurs nombres Lesquelles par la rigle des moyens ont este trouues cōme la dessusđ dōt la p̄miere est la racine de 2. qui est $1.\frac{169}{408}$. *qui multipliee en soy monte 2 plus* $\frac{1}{166464}$.

℞.^{2} *de .3. est 1.* $\frac{571}{780}$. *plus* $\frac{1}{608400}$.
℞.^{2} *de .5. est 2.* $\frac{161}{682}$. *plus* $\frac{1}{465124}$.
℞.^{2} *de .7. est 2.* $\frac{7873}{12192}$. *plus* $\frac{1}{148644864}$.
℞.^{2} *de .8. est 2.* $\frac{985}{1189}$. *plus* $\frac{1}{1413721}$.
℞.^{2} *de .10. est 3.* $\frac{1405}{8658}$. *plus* $\frac{1}{74960964}$.
Vel sic ℞.^{2} *de .10. est 3.* $\frac{228}{1405}$. *moins* $\frac{1}{1974025}$.
℞.^{2} *de .11. est 3.* $\frac{379}{1197}$. *plus* $\frac{1}{1432809}$.
℞.^{2} *de .12. est 3.* $\frac{181}{390}$. *plus* $\frac{1}{152100}$.
℞.^{2} *de .13. est 3.* $\frac{109}{180}$. *plus* $\frac{1}{32400}$.
℞.^{2} *de .14. est 3.* $\frac{2667}{3596}$. *plus* $\frac{1}{12931216}$.

Dans son manuscrit, Chuquet a traité clairement de racine première, carrée (seconde), tierce (cubique), quarte (racine quatrième), quinte (racine cinquième), etc. qu'il notait ℞.^{1}, ℞.^{2}, ℞.^{3}, ℞.^{4}, ℞.^{5}, etc. La procédure Maple ci-dessous donne pour résultat des valeurs approximatives de la racine *n-ième* d'un nombre obtenu par l'application de la règle des nombres moyens. Le résultat de cette procédure sera présenté soit sous la forme d'une liste, soit soit la forme d'un tableau *à la Chuquet*. Il faut passer à la procédure Maple `Chuquet` les six paramètres suivants et ce, dans l'ordre : la borne inférieure (*Inf*) de l'encadrement, la borne supérieure (*Sup*), le nombre (*c*) dont on veut extraire la racine *n-ième*, l'ordre *n* de la racine, le nombre d'approximations successives demandées et finalement, le dernier paramètre spécifiant la manière dont le résultat s'affichera : soit une liste d'approximations successives si on a spécifié *liste*, soit un tableau à la Chuquet si on a spécifié *tableau*.

Si les trois premiers paramètres ne vérifient pas les inégalités strictes $Inf < c < Sup$, où *Inf* et *Sup* doivent être des nombres rationnels sous la forme de fractions, il y aura un message d'erreur.

La borne inférieure de l'encadrement donnée, soit *Inf*, n'a pas été incluse dans la liste des valeurs approchées données avec cette procédure car elle n'est pas obtenue par la *règle des nombres moyens*. Cette valeur est, bien sûr, une valeur approchée par défaut.

```
> Chuquet:=proc(a::rational,b::rational,c::rational,Ordre::posint,N::posint,sortie::name)
   local Écart,i,Inf,j,k,L,M,MP,Sup;
   Digits:=600;
   Inf:=a;
   Sup:=b;
   if not type(c,'Range'(Inf^Ordre,Sup^Ordre)) then  error `Votre encadrement n'est pas valide` fi;

 #Définition de l'addition des  cancres##################################################################
  define(Chuq,Chuq(a::rational,b::rational)=Fraction('numer(a)+numer(b)','denom(a)+denom(b)'));

 #Amorce#################################################################################################
   if Inf^Ordre<c and Sup^Ordre>c then L[1]:=Chuq(Inf,Sup)fi;
```

```
  M[1,1]:=L[1]; if evalf(L[1]^Ordre)<c then  M[1,2]:=moins  else M[1,2]:=plus fi;
  if M[1,2]=moins then L[2]:=Chuq(Sup,L[1]) else L[2]:=Chuq(Inf,L[1]) fi;
  M[2,1]:=L[2];
  if evalf(L[2]^Ordre)<c then  M[2,2]:=moins else M[2,2]:=plus fi;

#Itération###########################################################################################
  for i from 2 to N do
   k:=nops(op(op(L)));
   do k:=k-1 until M[i,2] <> M[k,2];
   if k>=1 then L[i+1]:=Chuq(L[i],L[k])
    elif k=1 or k=0 and M[1,2]=moins then L[i+1]:=Chuq(L[i],Sup)
    elif k=1 or k=0 and M[1,2]=plus then L[i+1]:=Chuq(Inf,L[i])
   fi;
   M[i+1,1]:=L[i+1];
   if evalf(L[i+1]^Ordre)<c then M[i+1,2]:=moins else M[i+1,2]:=plus fi;
  od:
  MP:=[seq(op(M[k,2]),k=1..N)]; #,`&hellip;`
  Écart:=[abs(L[1]^Ordre-c),seq(abs((L[k])^Ordre-c),k=2..N)];
  undefine(Chuq);

#Sortie##############################################################################################
  if sortie=tableau then
  printf(`\n %s%a%s%a%s`,`          Approximations de la racine d'ordre `,  Ordre, ` du nombre
   ↪  `,c,`\n                  par la règle des nombres moyens \n`);
  printf(` \n      |===================|==========|=========================|\n`);
  seq(printf(`      | %a %-14a  | %7s  |   %20a
   ↪  |\n`,floor(L[k]),L[k]-floor(L[k]),MP[k],Écart[k]),k=1..nops(MP));
  printf(`      |___________________|__________|_________________________|\n`);
  elif sortie=liste then[seq((L[j]),j=1..N)]
  else error ` Vous devez spécifier tableau ou liste` fi
 end proc:
```

La procédure `Chuquet` est appropriée pour donner une liste de valeurs approchées de la racine d'ordre n de n'importe quel nombre entier (positif). Il faudra éventuellement ajuster manuellement la dimension du tableau pour une présentation correcte.

Obtenons, avec la procédure Maple `Chuquet`, les 13 premières approximations successives de $\sqrt{6}$. D'abord sous une forme de liste, puis sous forme de tableau. Soit donc les deux requêtes `Chuquet(2,3,6,2,16,liste);` et `Chuquet(2,3,6,2,16,tableau);`.

```
> Chuquet(2,3,6,2,13,liste);
  Chuquet(2,3,6,2,13,tableau);
```

$$\left[\frac{5}{2},\frac{7}{3},\frac{12}{5},\frac{17}{7},\frac{22}{9},\frac{27}{11},\frac{49}{20},\frac{71}{29},\frac{120}{49},\frac{169}{69},\frac{218}{89},\frac{267}{109},\frac{485}{198}\right]$$

```
          Approximations de la racine d'ordre 2 du nombre 6
                 par la `règle` des nombres moyens

     |===================|==========|=========================|
     | 2 1/2             |    plus  |                    1/4  |
     | 2 1/3             |   moins  |                    5/9  |
     | 2 2/5             |   moins  |                   6/25  |
     | 2 3/7             |   moins  |                   5/49  |
     | 2 4/9             |   moins  |                   2/81  |
     | 2 5/11            |    plus  |                  3/121  |
     | 2 9/20            |    plus  |                  1/400  |
     | 2 13/29           |   moins  |                  5/841  |
     | 2 22/49           |   moins  |                 6/2401  |
     | 2 31/69           |   moins  |                 5/4761  |
     | 2 40/89           |   moins  |                 2/7921  |
     | 2 49/109          |    plus  |                3/11881  |
     | 2 89/198          |    plus  |                1/39204  |
     |___________________|__________|_________________________|
```

Autre exemple de la découverte de Chuquet, approchons la racine quatrième de 137. L'encadrement de départ choisi est $3^4 < 137 < 4^4$ et nous afficherons la 30ᵉ approximation.

```
> L:=Chuquet(3,4,137,4,30,liste):
  'L'[30]=L[30];
  surd(137,4)-L[30]=evalf(137-L[30]^4);
```

$$L_{30} = \frac{8967}{2621}$$

$$137^{1/4} - \frac{8967}{2621} = -8.862042555775575627 2 \times 10^{-6}$$

En aucun temps, la règle des nombres moyens requiert un encadrement qui soit initialement composé de nombres entiers. Il peut être donné avec des nombres fractionnaires.

Il y a encore tant à dire sur l'apport de Nicolas Chuquet... Son probable élève, Estienne de La Roche, dans son *L'arismethique* publié en 1520, a copié une grande partie du manuscrit de Chuquet sans pour autant permettre de saisir la précocité du remarquable travail de Nicolas Chuquet. Chuquet, avec une réelle approche heuristique, a énoncé de manière rhétorique (sans formules symboliquement opérables) les lois des radicaux, les lois des exposants, les exposants négatifs et les racines imaginaires, ce dont La Roche a mis de côté dans sa publication de 1520, omettant même l'exposant nul.

Pour avoir une meilleure compréhension de la place de Chuquet dans l'Histoire des mathématiques, je suggère les deux articles suivants de Maryvonne Spiesser, de l'Institut de mathématiques de l'Université Paul Sabatier Toulouse III – France : *L'Algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte des savoirs mathématiques de la fin du XVᵉ siècle* publié dans *Histoire littéraire de la France*, t. 43, fasc. 1 (2005), 129-172. < http://www.numdam.org/article/RHM_2006__12_1_7_0.pdf > et *L'Algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l'arithmétique commerciale* publiée dans la Revue d'Histoire des mathématiques. < http://www.numdam.org/article/RHM_2006__12_1_7_0.pdf >

Ce qui m'a motivé pour présenter cette partie du travail de Chuquet est la citation de Léon Rodet (1832 ?-1850 ?–1895) dans le livre de Claude Brezinski intitulé « *History of Continued Fractions and Padé Approximants* (Springer 1991) » Au chapitre 1 (p.24). Ce que Rodet laisse entendre, c'est que la *Règle des nombres moyens* est un *un procédé fort simple pour le calcul toutes les réduites successives de la fraction continue exprimant le nombre que l'on cherche.* Cette affirmation doit être nuancée.

Notons d'abord, que la méthode « *Médiation* » qu'évoque Rodet dans son article *Sur les méthodes d'approximations chez les anciens, Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 159-167* [74] comme étant celle de La Roche n'est pas exacte mais elle est plutôt celle de Chuquet. En effet, il y a eu la découverte du manuscrit de Chuquet par Aristide Marre en 1870 mais puisqu'il ne le publia que partiellement en 1880, Rodet, à sa défense, n'a pas pu en avoir connaissance avant la rédaction de son article en 1879.

Voici l'extrait de l'article de Rodet, exposant l'observation qu'il a fait à partir du tableau des plus et des moins des valeurs approchées de $\sqrt{6}$:

> *Relevons dans ce Tableau les termes pour lesquels se produit une variation dans le sens de l'approximation, en plaçant en tête la valeur 2 écrite sous la forme* $2{+}\frac{0}{1}$ *; il résulte de la façon même dont nos nombres sont obtenus qu'ils ont, en réalité, la forme suivante :*

Par défaut :	*Par excès :*
$2{+}\frac{0}{1}$,	$2{+}\frac{1}{2}$,
$2{+}\frac{4}{9} = 2 + \frac{0+4.1}{1+4.2}$,	$2{+}\frac{9}{20} = 2 + \frac{1+2.4}{2+2.9}$,
$2{+}\frac{40}{89} = 2 + \frac{4+4.9}{9+4.20}$,	$2{+}\frac{89}{198} = 2 + \frac{9+2.40}{2+2.89}$,

Or, si nous calculons les réduites successives de la valeur de $\sqrt{6}$ *en fraction continue, nous avons*

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}},$$

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{22}{9} = \frac{2+4.5}{1+4.9}, \quad \frac{49}{20} = \frac{5+2.22}{2+2.9},$$

$$\frac{218}{89} = \frac{22+4.49}{9+4.20}, \quad \frac{485}{198} = \frac{49+2.218}{20+2.89}$$

c'est-à-dire que la « règle de mediacion entre le plus et le moins » amène par tâtonnement et par un procédé fort simple, l'addition terme à terme de fractions, à calculer toutes les réduites successives de la fraction continue exprimant le nombre que l'on cherche.

D'après le tableau (voir **Fig. 41** et la reproduction de ce tableau avec Maple ci-haut), il semble, pour Rodet, qu'effectivement la *Rigle de mediacion entre le plus et le moins* génère « … *les premiers termes seulement,* ***les seuls dont j'aie besoin*** : » qui l'amène à conclure que la méthode de médiation permet de « *calculer toutes les réduites successives de la fraction continue exprimant le nombre que l'on cherche* ». En s'appuyant seulement sur ces premiers calculs, Rodet ne fait pas du tout la démonstration que la *Règle des nombres moyens* permet de générer toutes les *réduites successives de la fraction continue exprimant le nombre que l'on cherche*.

En obtenant les 13 premières valeurs approchées de $\sqrt{6}$ avec la procédure `Chuquet`, on retrouve (par tâtonnement comme dit Rodet) effectivement les 5 premières réduites du développement en fraction continue de $\sqrt{6}$ (si on exclut dans la liste des réduites la valeur 2, soit la valeur inférieure de l'encadrement que Chuquet a considérée).

```
> k:=13:
  Liste_Chuquet:=Chuquet(2,3,6,2,k,liste);
  Liste_Réduites:=Principales(Fcs(sqrt(6),k),k+1);
  Valeurs_Communes:=`intersect`(convert(Liste_Chuquet,set),convert(Liste_Réduites,set));
  Card(Valeurs_Communes)=(nops(Valeurs_Communes));
  k:='k':
```

$$Liste\_Chuquet := \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{12}{5}, \frac{17}{7}, \frac{22}{9}, \frac{27}{11}, \frac{49}{20}, \frac{71}{29}, \frac{120}{49}, \frac{169}{69}, \frac{218}{89}, \frac{267}{109}, \frac{485}{198}\right]$$

$$Liste\_Réduites := \left[2, \frac{5}{2}, \frac{22}{9}, \frac{49}{20}, \frac{218}{89}, \frac{485}{198}, \frac{2158}{881}, \frac{4801}{1960}, \frac{21362}{8721}, \frac{47525}{19402}, \frac{211462}{86329}, \frac{470449}{192060}, \frac{2093258}{854569}\right]$$

$$Card\left(\left\{\frac{5}{2}, \frac{22}{9}, \frac{49}{20}, \frac{218}{89}, \frac{485}{198}\right\}\right) = 5$$

Poursuivons avec un dénombrement seul du nombre de réduites générées par la procédure `Chuquet`. Ce dénombrement sera obtenu avec la procédure Maple `Calcul` ci-dessous qui reprend les requêtes précédentes en bloc. Pour obtenir l'information des ressources utilisée par Maple pour compléter le dénombrement, nous allons appliquer la macro-commande Maple `Usage` de l'extension `CodeTools` à la procédure Maple Calcul. Le temps de calcul avec différentes valeurs de k indiquera au lecteur le temps d'exécution que cela a pris à l'aide de mon vieil ordinateur âgé de treize ans et ce, après un nouveau lancement de Maple.

```
> with(CodeTools):
```

```
> Calcul:=proc(k::posint)
  local Liste_Chuquet,Liste_Réduites,Valeurs_Communes;
  Liste_Chuquet:=Chuquet(2,3,6,2,k,liste);
  Liste_Réduites:=Principales(Fcs(sqrt(6),k),k+1);
  Valeurs_Communes:=`intersect`(convert(Liste_Chuquet,set),convert(Liste_Réduites,set));
  'Card('Valeurs_Communes')'=nops(Valeurs_Communes)
  end proc:
```

```
> Usage(Calcul(50));
```
memory used=0.69MiB, alloc change=0 bytes, cpu time=0ns, real time=7.00ms, gc time=0ns

$$Card(Valeurs\_Communes) = 17$$

Le nombre de réduites générées par *Chuquet* a augmenté. Essayons avec $k = 100, k = 200, k = 400$ et $k = 600$

```
> Usage(Calcul(100));
```
memory used=133.91MiB, alloc change=0 bytes, cpu time=375.00ms, real time=845.00ms, gc
↪ time=78.12ms

$$Card(Valeurs\_Communes) = 33$$

```
> Usage(Calcul(200));
```
memory used=0.52GiB, alloc change=0 bytes, cpu time=1.78s, real time=3.31s, gc time=234.38ms

$$Card(Valeurs\_Communes) = 67$$

```
> Usage(Calcul(400));
```
memory used=2.21GiB, alloc change=0 bytes, cpu time=5.53s, real time=14.53s, gc time=593.75ms

$$Card(Valeurs\_Communes) = 133$$

```
> Usage(Calcul(600));
```
memory used=6.07GiB, alloc change=8.00MiB, cpu time=15.72s, real time=38.96s, gc time=2.59s

$$Card(Valeurs\_Communes) = 200$$

Ce que l'on observe (par tâtonnement en fait), c'est que le nombre de réduites générées par la *Règle des nombres moyens* augmente toujours lorsqu'on augmente le nombre de nombres moyens et que le nombre de réduites correspond au tiers des nombres moyens. Observons-le en générant 1000 nombres moyens... il faudra être patient.

```
> Usage(Calcul(1000));
```
memory used=23.53GiB, alloc change=45.84MiB, cpu time=84.88s, real time=3.16m, gc time=7.97s

$$Card(Valeurs\_Communes) = 333$$

Ces calculs semblent montrer qu'il y a le tiers des réduites du développement en fraction continue de $\sqrt{6}$ parmi les premiers nombres calculés avec la « *Règle de nombres moyens* ». Il semble donc qu'il soit possible d'obtenir toutes les réduites du développement en fraction continue de $\sqrt{6}$. On peut encore calculer un nombre plus grand de nombres moyens, mais les contraintes physiques d'un ordinateur (des nombres entiers de plus en plus grands à traiter) en limite la possibilité. Nous ne pouvons que conjecturer que c'est le tiers des réduites du développement en fraction continue de $\sqrt{6}$ qu'on retrouve parmi les nombres calculés avec la « *Règle de nombres moyens* ».

Sur la seule base des treize premiers nombres moyens pour approcher $\sqrt{6}$ (… *les seuls dont j'aie besoin*), Rodet a mis en évidence effectivement qu'il y avait des réduites du développement en fraction continue de $\sqrt{6}$. Mais, que Rodet puisse affirmer que la *Règle des nombres moyens* permettrait de générer toutes les *réduites successives de la fraction continue en question* est une affirmation qu'il n'a nullement prouvée. D'autant plus qu'il faut les trouver par tâtonnement. En fait, le mérite de Rodet est d'avoir mis en évidence le fait suivant : pour approcher la racine carrée de six, la *Règle des nombres moyens* étant un procédé de calcul par excès et par défaut, tout comme l'est le calcul des réduites de la fraction continue, il semble que ce procédé permet de retrouver toutes les réduites parmi les nombres moyens.

Théon de Smyrne : Des nombres latéraux et des nombres diagonaux

Environ 1350 ans avant Chuquet, Théon de Smyrne a proposé une méthode d'approximation pour le calcul de la racine carrée du nombre 2. De manière similaire à Bombelli, il est possible, a posteriori, d'exprimer la méthode de Théon avec des fractions continues et, comme pour Bombelli, cela ne fait pas pour autant de Théon un précurseur des fractions continues. Voici ce dont il s'agit.

Sur le site Internet *L'antiquité grecque et latine du moyen âge* (<https://remacle.org>), plus précisément à la page <https://remacle.org/bloodwolf/erudits/theon/arit.htm#_ftnref35> nous retrouvons la traduction en français de l'*Arithmétique* de Théon de Smyrne.

Théon de Smyrne était un philosophe platonicien. Nous n'avons aucune donnée précise sur l'époque à laquelle vécut Théon de Smyrne (aujourd'hui Izmir en Turquie). On dit aussi Théon l'Ancien. C'est indirectement que les historiens ont établi qu'il a vécu probablement de l'an 70 à l'an 135 (I^er^ et II^e^ siècle de notre ère). Théon a composé un abrégé de mathématiques en cinq livres, qui a pour titre : *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*; l'exposition abrégée comprenait : I, l'arithmétique; II, la géométrie (plane); III, la stéréométrie (géométrie de l'espace); IV, l'astronomie; et V, la musique.

Dans son *Arithmétique*, Théon traite des nombres pairs et des nombres impairs, du nombre premier ou incomposé, des nombres hétéromèques et des nombres promèques, des nombres semblables, des nombres polygonaux et des nombres pyramidaux, des nombres latéraux et des nombres diagonaux, des nombres parfaits, des nombres abondants et des nombres déficients... Nous allons nous pencher sur XXXI où nous transposerons avec une procédure Maple son procédé algorithmique pour approcher $\sqrt{2}$: *Des nombres latéraux et des nombres diagonaux*

« De même que les nombres ont en puissance les rapports des triangulaires, des tétragones, des pentagones et des autres figures, nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc, comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.

Supposons, par exemple, deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout soit en puissance le côté et la diagonale; ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois. Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit. Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité. Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est-à-dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors 2 unités; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est-à-dire 2 unités à l'unité, la diagonale vaudra 3 unités; le carré construit sur le côté 2 et 4, et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2. De même, ajoutons au côté 2 la diagonale 3, le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est-à-dire 2 fois 2,