***Propriété* 1.** $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ une matrice régulière d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconque. La matrice A étant une matrice régulière, nous avons l'égalité suivante. $AA^{-1} = I$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& AA^{-1} &&= I && \\
\Longleftrightarrow\ & |AA^{-1}| &&= |I| && \text{prendre le déterminant} \\
\Longleftrightarrow\ & |A|\,|A^{-1}| &&= 1 && \text{dét. d'un produit et dét. de la matrice identité} \\
\Longleftrightarrow\ & |A^{-1}| &&= \frac{1}{|A|} && \text{A étant régulière, } |A| \neq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & |A^{-1}| &&= |A|^{-1} && \text{réécriture}
\end{aligned}$$

■

***Propriété* 2.** $(A^{-1})^{-1} = A$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ une matrice régulière d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconque. Puisque la matrice A est régulière, nous avons que

$$AA^{-1} = I \text{ et } A^{-1}A = I$$

La définition de la matrice inverse nous permet de conclure que la matrice A est la matrice inverse de la matrice A^{-1}. Puisque la matrice inverse est unique, on conclut donc que $(A^{-1})^{-1} = A$. ■

***Propriété* 3.** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$ deux matrices régulières d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconques. D'une part, en multipliant à droite AB par $B^{-1}A^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned}
& (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} && \text{associativité de la multiplication} \\
\Longleftrightarrow\ & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = AIA^{-1} && \text{simplification} \\
\Longleftrightarrow\ & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = (AI)A^{-1} && \text{associativité de la multiplication} \\
\Longleftrightarrow\ & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} && I \text{ est le neutre multiplicatif} \\
\Longleftrightarrow\ & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I && \text{simplification}
\end{aligned}$$

et d'autre part, en multipliant à gauche AB par $B^{-1}A^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned}
& (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B && \text{associativité de la multiplication} \\
\Longleftrightarrow\ & (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}IB && \text{simplification} \\
\Longleftrightarrow\ & (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(IB) && \text{associativité de la multiplication} \\
\Longleftrightarrow\ & (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}B && I \text{ est le neutre multiplicatif} \\
\Longleftrightarrow\ & (B^{-1}A^{-1})(AB) = I && \text{simplification}
\end{aligned}$$

Cela montre que la matrice $B^{-1}A^{-1}$ est la matrice inverse de la matrice AB. Étant donné que celle-ci est unique, on a donc $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. ■

Propriété 4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ une matrice régulière d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconque. La matrice A étant une matrice régulière, nous avons l'égalité suivante. $AA^{-1} = I$. Ainsi, nous avons d'une part, que

$$\begin{aligned}
& AA^{-1} && = I && \\
\iff\ & (AA^{-1})^T && = I^T && \text{prendre la transposée} \\
\iff\ & (A^{-1})^T A^T && = I && \text{transposé d'un produit et transposé de la matrice identité}
\end{aligned}$$

et, d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
& A^{-1}A && = I && \\
\iff\ & (A^{-1}A)^T && = I^T && \text{prendre la transposée} \\
\iff\ & (A)^T (A^{-1})^T && = I && \text{transposé d'un produit et transposé de la matrice identité}
\end{aligned}$$

Cela montre que la matrice $(A^{-1})^T$ est la matrice inverse de la matrice A^T. Étant donné que celle-ci est unique, on a donc $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. ∎

Propriété 5. $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ une matrice régulière d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconque.
Démontrons cette égalité par induction mathématique. Établissons d'abord, la véracité de l'égalité pour $m = 1$.

Pour $m = 1$, on a évidemment $(A^1)^{-1} = A^{-1} = (A^{-1})^1$.

Supposons maintenant, par hypothèse d'induction, qu'avec $m = k \geq 1$ l'égalité $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ est vraie et montrons que cela entraîne nécessairement la véracité de $(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$.

$$\begin{aligned}
& (A^{k+1})^{-1} = (AA^k)^{-1} && \text{loi des exposants} \\
\Longrightarrow\ & (A^{k+1})^{-1} = (A^k)^{-1} A^{-1} && \text{inverse d'un produit} \\
\Longrightarrow\ & (A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^k A^{-1} && \text{par hypothèse d'induction} \\
\Longrightarrow\ & (A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1} && \text{loi des exposants}
\end{aligned}$$

Cela montre que si $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ est vraie pour $m = k \geq 1$, $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ est encore vraie pour $m = k + 1$. En vertu de l'axiome d'induction, on conclut que

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m \qquad \forall m \geq 1$$

∎

Propriété 6. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ une matrice régulière d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconque. Puisque $k \neq 0$ et A régulière, nous avons d'une part, que

$$\begin{array}{rll} & (kA)(k^{-1}A^{-1})= k(A(k^{-1}A^{-1})) & \text{prop de la multi. de matrices} \\ \iff & (kA)(k^{-1}A^{-1})= (kk^{-1})(AA^{-1}) & \text{prop de la multi. de matrices} \\ \iff & (kA)(k^{-1}A^{-1})= AA^{-1} & \text{simplification dans } \mathbb{R} \\ \iff & (kA)(k^{-1}A^{-1})= I & \text{simplification dans les matrices} \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rll} & (k^{-1}A^{-1})(kA)= k^{-1}(A^{-1}(kA)) & \text{prop de la multi. de matrices} \\ \iff & (k^{-1}A^{-1})(kA)= (k^{-1}k)(A^{-1}A) & \text{prop de la multi. de matrices} \\ \iff & (k^{-1}A^{-1})(kA)= A^{-1}A & \text{simplification dans } \mathbb{R} \\ \iff & (k^{-1}A^{-1})(kA)= I & \text{simplification dans les matrices} \end{array}$$

Cela montre que la matrice $k^{-1}A^{-1}$ est l'inverse de la matrice kA. Étant donné que celle-ci est unique, on conclut que $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ ■

Propriété 7. $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$ (Ici, n spécifie l'ordre de la matrice A)

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ une matrice régulière d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconque. Nous avons que

$$\begin{array}{rlll} & A^{-1} & = \dfrac{1}{|A|} \text{ adj } A & A \text{ est régulière} \\ \iff & |A^{-1}| & = \left| \dfrac{1}{|A|} \text{ adj } A \right| & \text{prendre le déterminant} \\ \iff & |A|^{-1} & = \left(\dfrac{1}{|A|}\right)^n |\text{adj } A| & \text{prop. des déterminant où } A \in \mathcal{M}_{n\times n} \\ \iff & |A|^{-1} & = \dfrac{1}{|A|^n} |\text{adj } A| & \text{réécriture des exposants} \\ \iff & |A|^{n-1} & = |\text{adj } A| & \text{réduction des exposants} \end{array}$$

■

Propriété 8. $\text{adj }(AB) = \text{adj } B \text{ adj } A$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$ deux matrices régulières d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconques. Nous avons que

$$\begin{array}{rlll} & (AB)^{-1} & = B^{-1}A^{-1} & \text{l'inverse d'un produit} \\ \iff & \dfrac{1}{|AB|} \text{ adj }(AB) & = \left(\dfrac{1}{|B|} \text{ adj } B\right)\left(\dfrac{1}{|A|} \text{ adj } A\right) & \text{définition de l'inverse} \\ \iff & \dfrac{1}{|A|\,|B|} \text{ adj }(AB) & = \dfrac{1}{|B||A|} (\text{adj } B \text{ adj } A) & \text{déterminant d'un produit et} \\ & & & \text{prop de la multi. de matrices} \\ \iff & \text{adj }(AB) & = \text{adj } B \text{ adj } A & \text{simplification} \end{array}$$

■

Propriété 9. adj $(kA) = k^{n-1}\text{adj } A$

Preuve : Soit $A_{n\times n}$ une matrice régulière d'ordre $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) quelconques. La prop 6 a établit que $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$. Alors, nous avons que

$$\begin{array}{rlll} & (kA)^{-1} & = k^{-1}A^{-1} & \text{prop 6} \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{|kA|}\text{ adj }(kA) & = k^{-1}\dfrac{1}{|A|}\text{ adj } A & \text{définition de l'inverse} \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{k^n|A|}\text{ adj }(kA) & = k^{-1}\dfrac{1}{|A|}\text{ adj } A & \text{prop des déterminants} \\ \Longleftrightarrow & \text{adj }(kA) & = k^{n-1}\text{ adj } A & \text{simplification} \end{array}$$

■