Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit f une fonction définie par une règle simple ou par morceaux.

Dans le calcul de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on remplace éventuellement x par a même lorsque $f(a)$ n'est pas définie. Puisqu'il ne s'agit pas de calculer $f(a)$, le résultat d'un tel calcul prendra l'une ou l'autre des formes suivantes qu'il faudra interpréter.

- $f(a)$, si la fonction f est continue en $x = a$.
- $+\infty$ ou $-\infty$.
- n'existe pas si
  - f n'est pas partout définie dans un voisinage troué de a.
  - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
  - les images de la fonction ne tendent pas vers une valeur unique lorsque $x \to a$.
- $\left.\begin{array}{|l} \circ\ \dfrac{k}{0} \text{ où } k \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}. \\ \circ\ \sqrt[n]{0} \text{ où n est un entier pair.} \\ \circ\ \log_b(0) \text{ où } b \in]0,\infty[\backslash 1. \end{array}\right\}$ préciser 0^+ ou 0^-
- $\left.\begin{array}{|l} \circ\ \arcsin(1). \\ \circ\ \arccos(1). \\ \circ\ \operatorname{arcsec}(1). \\ \circ\ \operatorname{arccsc}(1). \end{array}\right\}$ préciser 1^+ ou 1^-
- $\left.\begin{array}{|l} \circ\ \arcsin(-1). \\ \circ\ \arccos(-1). \\ \circ\ \operatorname{arcsec}(-1). \\ \circ\ \operatorname{arccsc}(-1). \end{array}\right\}$ préciser $(-1)^+$ ou $(-1)^-$
- $\left.\begin{array}{|l} \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \infty-\infty. \\ 1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ (0^+)^0 \end{array}\right\}$ lever ces formes indéterminées.
- $0^{\text{exposant variable}}\}$ préciser 0^+ ou 0^- puisque $(0^-)^{\text{exposant variable}}$ n'est pas définie.

La connaissance des graphiques de $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \log_b(x)$, $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$, $y = \operatorname{arcsec}(x)$, $y = \operatorname{arccsc}(x)$ permet facilement d'interpréter correctement les formes précédentes.

- ► $\dfrac{k}{0^+} \xrightarrow[k>0]{} +\infty$, $\quad \dfrac{k}{0^-} \xrightarrow[k>0]{} -\infty$, $\quad \dfrac{k}{0^+} \xrightarrow[k<0]{} -\infty$, $\quad \dfrac{k}{0^-} \xrightarrow[k<0]{} +\infty$.
- ► $\sqrt[n]{0^+} \xrightarrow[n \text{ pair}]{n \text{ impair}} 0$ tandis que $\sqrt[n]{0^-}$ n'est pas définie lorsque n est pair.
- ► $\log_b(0^+) \xrightarrow[0<b<1]{} +\infty$, $\quad \log_b(0^+) \xrightarrow[b>1]{} -\infty$ tandis que $\log_b(0^-)$ n'est pas définie.
- ► $\left.\begin{array}{|l} \arcsin(1^+),\ \arccos(1^+),\ \arcsin((-1)^-),\ \arccos((-1)^-) \\ \operatorname{arcsec}(1^-),\ \operatorname{arccsc}(1^-),\ \operatorname{arcsec}((-1)^+),\ \operatorname{arccsc}((-1)^+) \end{array}\right\}$ ne sont pas définies.

Exemples

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+2}{e^x} = \dfrac{3(-\infty)+2}{e^{-\infty}} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x-5}{1-e^x} = \dfrac{(-5)^-}{1-1^-} = \dfrac{(-5)^-}{0^+} = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to1^-} \ln(1-x)$ rép: $-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\csc(x)}{\tan(x)}$ rép: $-\infty$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\cos(x)}{x}$ rép: 0

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} e^{\tan(x)}$ rép: 0

7. $\lim\limits_{x\to2} \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ rép: $\frac{\pi}{3}$

8. $\lim\limits_{x\to1^+} \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right)$ rép: $\nexists$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^x$ rép: $+\infty$

10. $\lim\limits_{x\to0^-} \left(\frac{1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$ rép: $+\infty$

11. $\lim\limits_{x\to2} (1-2x)^x$ rép: $\nexists$

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x^{\sec(x)}$ rép: $\nexists$ ($\grave{a}\ g : +\infty; \grave{a}\ d : 0$)

Voici deux théorèmes permettant une évaluation rapide des limites à $\pm\infty$ de fonctions polynomiales et de fonctions rationnelles.

***Théorème 1** (Limite à $\pm\infty$ d'une fonction polynomiale).* Si f est une fonction définie par un polynôme de degré n, soit par $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(n \in \mathbb{N})$, alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

Autrement dit, la limite à l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite à l'infini du terme dominant.

Preuve : Soit f une fonction polynomiale de degré n. Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n \left(1 + \tfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \tfrac{a_{n-2}}{a_nx^2} + \ldots + \tfrac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \tfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \tfrac{a_0}{a_nx^n}\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \tfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \tfrac{a_{n-2}}{a_nx^2} + \ldots + \tfrac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \tfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \tfrac{a_0}{a_nx^n}\right)\\
&= \left(\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n\right) \cdot 1\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n
\end{aligned}$$

■

Exemples

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2) = \lim\limits_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+3x-x^3) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = \infty$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^6+x-4) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^6 = \infty$

Théorème 2 *(Limite à $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle).* Si f est une fonction définie par un quotient de deux polynômes de degré n et m, soit par $f(x) = \dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$ $(m, n \in \mathbb{N})$, alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Autrement dit, la limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des termes dominants.

Preuve : Soit f une fonction définie par un quotient de deux polynômes de degré n et m. Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \frac{a_{n-2}}{a_nx^2} + \ldots + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right)}{b_mx^m\left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + \frac{b_{m-2}}{b_mx^2} + \ldots + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_0}{b_mx^m}\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m} \cdot \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}+\ldots+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\frac{b_{m-2}}{b_mx^2}+\ldots+\frac{b_2}{b_mx^{m-2}}+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right)\cdot 1 \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}
\end{aligned}$$

■

Exemples

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-x^3+5x}{x^4-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$

17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+5x-1}{3-4x^2-6x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{-6x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}$

18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^5-1}{4x^2-x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^5}{-x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} -5x = \infty$

Exercices sur les limites

Évaluer dans $\overline{\mathbb{R}}$ les limites suivantes, si elles existent. (Calculer séparément les limites à gauche et à droite lorsque nécessaire)

Identifier les formes indéterminées et lever chacune de celles-ci

- lorsqu'il s'agit d'une limite remarquable;
- lorsque la levée de l'indétermination peut être faite algébriquement.

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-3}{(x-4)^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$
4. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}}$
5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4-x-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+5}{4-x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^2-x+8)$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{x+3}}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} (7-x+5x^7)$
10. $\lim\limits_{x\to 2} \log_3(x+7)$
11. $\lim\limits_{x\to 3} \log_6(2-x)$
12. $\lim\limits_{x\to 3^-} \log_2(3-x)$
13. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x-1)$
14. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$
15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x}{x}$
16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\left(\frac{1}{5}\right)^x}$
17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\log_2(x)}$
18. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{1-\mathrm{e}^x}$
19. $\lim\limits_{x\to\pi} \mathrm{e}^{\tan(x)}$
20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$
21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$
22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$
23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \sec^2(2x)$
24. $\lim\limits_{x\to\pi} \mathrm{e}^{\cot(x)}$
25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\sec(x)}{\sin(x)}$
26. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+\tan(x))$
27. $\lim\limits_{x\to 1^-} \arcsin(x)$
28. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan(x-1)$
29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \arccos(\sin(x))$
30. $\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan(x^3)$
31. $\lim\limits_{x\to 0} \arccos(1+x)$
32. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x+2}$
33. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln(x)}$
34. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
35. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$
36. $\lim\limits_{x\to 1} (x-4)^{x+1}$
37. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\csc(x)}$
38. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x-2}$
39. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{4}{x-1}\right)^{x-1}$
40. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)^{\arcsin(\frac{x}{2})}$
41. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$
42. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} (\sin(x))^{\tan(3x)}$
43. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
44. $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Réponses aux exercices sur les limites

1. $+\infty$	2. $\nexists$ (à g: $+\infty$; à d: $-\infty$)	3. $+\infty$	4. $-\infty$
5. Ind. $\frac{0}{0}$	6. -2	7. $+\infty$	8. Ind. $\frac{+\infty}{+\infty}$
9. $+\infty$	10. 2	11. $\nexists$	12. $-\infty$
13. $\nexists$ (à g: $\nexists$; à d: $-\infty$)	14. Ind. $(0^+)(-\infty)$	15. Ind. $\frac{\pm\infty}{+\infty}$	16. $+\infty$
17. $\nexists$ (à g: $-\infty$; à d: $+\infty$)	18. $-\infty$	19. 1	20. Ind. $\frac{0}{0}$
21. Ind. $\frac{0}{0}$	22. 0	23. 4	24. $\nexists$ (à g: 0; à d: $+\infty$)
25. $-\infty$	26. $\nexists$	27. $\frac{\pi}{2}$	28. $-\frac{\pi}{4}$
29. 0	30. $-\frac{\pi}{2}$	31. $\nexists$ (à g: 0; à d: $\nexists$)	32. 0
33. $+\infty$	34. Ind. $(0^+)^0$	35. Ind. $(1)^{\pm\infty}$	36. $\nexists$
37. 0	38. $+\infty$	39. Ind. $(+\infty)^0$	40. $\nexists$ (à g: 0; à d: $\nexists$)
41. 0	42. $\nexists$ (à g: 0; à d: $+\infty$)	43. e	44. 1