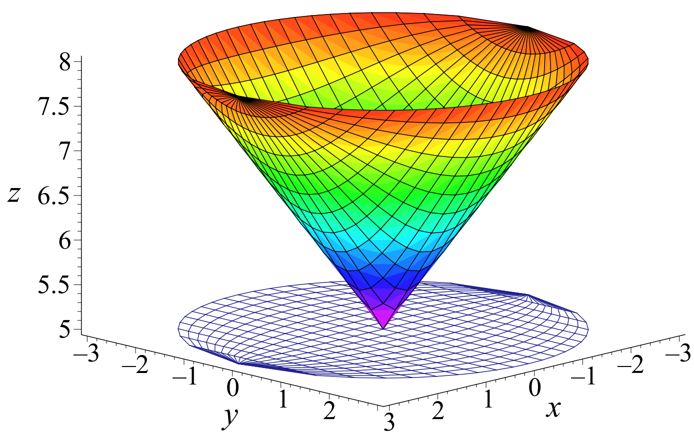
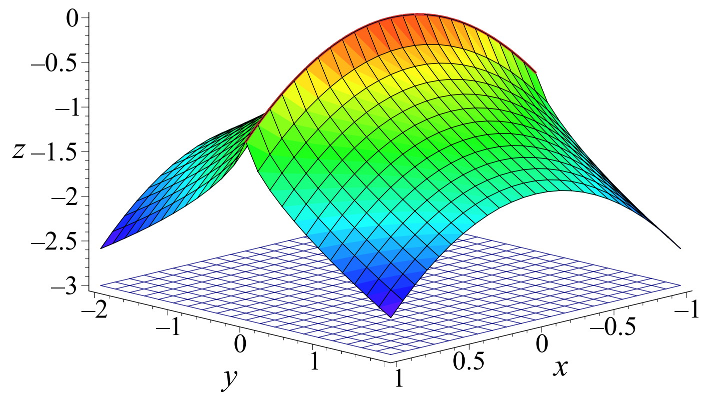
La différentiabilité d'une fonction f en (x_0,y_0)

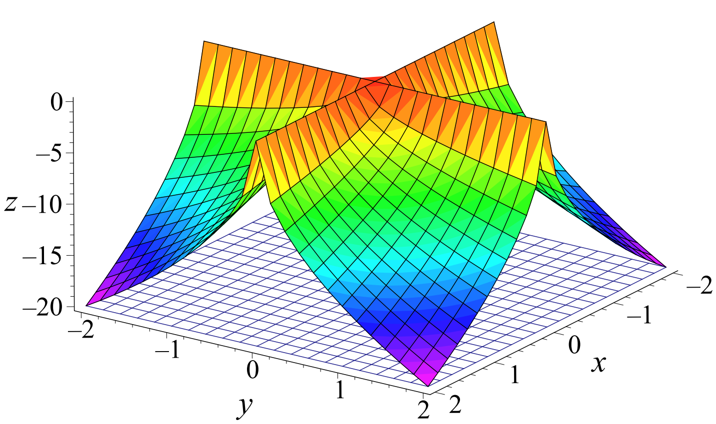
D'un point de vue géométrique, la différentiabilité en (x_0,y_0) signifie que le plan tangent en (x_0,y_0) à la surface S représentative de f est «proche» de S en tout point d'un voisinage de (x_0,y_0). Cette proximité du plan tangent et de la surface S doit être visualisé de manière à ce que la surface épouse de plus en plus le plan tangent au fur et à mesure que le voisinage de (x_0,y_0) se rappetisse. En somme, si en un endroit, on peut concevoir qu'avec un zoom avant, la surface se «linéarise» au point de se confondre de plus en plus au plan tangent, la fonction est alors différentiable en cet endroit.



Le cône d'équation $z = \mathrm{f}(x,y) = -(x^2+y^2)^{1/2}$ est différentiable partout, sauf évidemment au sommet.

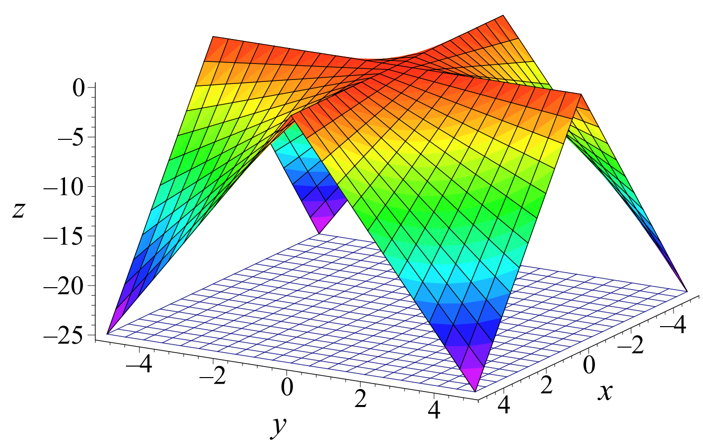


La surface d'équation $z = \mathrm{f}(x,y) = -(x^2+y^{2/3})$ est différentiable partout, sauf aux points $(x,0)$. En ces points, la dérivée partielle f_y n'existe pas.



La fonction f définie par $z = \mathrm{f}(x,y) = -10\sqrt{|xy|}$ possède des dérivées partielles nulles à l'origine mais n'est pas différentiable à cet endroit.

La continuité d'une fonction f en (x_0,y_0) et l'existence des dérivées partielles en (x_0,y_0) ne sont pas des conditions suffisantes pour assurer la différentiabilité en (x_0,y_0).



La fonction f définie par $z = \mathrm{f}(x,y) = -|xy|$ ne possède pas de dérivées partielles continues à l'origine mais cette fonction est quand même différentiable à l'origine.

La continuité des dérivées partielles en (x_0,y_0) n'est pas une condition nécessaire pour assurer la différentiabilité en (x_0,y_0). Cependant, la continuité des dérivées partielles en (x_0,y_0) est une condition suffisante pour assurer la différentiabilité en (x_0,y_0).

Pierre Lantagne

Enseignant retraité du Collège de Maisonneuve