Collège de Maisonneuve
Département de mathématiques

Calcul avancé

# Compléments

**Pierre Lalonde**

**Hiver 2006**

# Table des matières

# Section 1

# Généralités sur les séries

## 1.1 Rappels ; critères de convergence

### 1.1.1 Séries

Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une séquence de nombres. L'expression

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

est la *série (infinie) associée*. Ses *sommes partielles* sont

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad \ldots ,$$

ou en général :

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \, .$$

Si, pour un certain nombre *réel* $L$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = L \, ,$$

on dira que la série *converge (vers $L$)* et on écrira : $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = L$. Ceci définit la valeur numérique de la série. Si la série ne converge pas, on dira qu'elle *diverge*. Dans ce cas, on ne peut (à ce niveau) donner de signification numérique à la série.

**Exemple 1.1** Considérons la séquence $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ (i.e. $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$, ..., $a_i = 1/2^i$, ...). La série associée est :

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i \, .$$

Ses sommes partielles sont :

$$\begin{array}{lclclcl}
s_0 & = & 1 & = & 1 & = & 2 - 1/2^0, \\
s_1 & = & 1 + 1/2 & = & 3/2 & = & 2 - 1/2^1, \\
s_2 & = & 1 + 1/2 + 1/4 & = & 7/4 & = & 2 - 1/2^2, \\
s_3 & = & 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 & = & 15/8 & = & 2 - 1/2^3,
\end{array}$$

et ainsi de suite. Cette nouvelle suite de nombres vérifie :

$$s_n = 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n = \sum_{i=0}^{n} 1/2^i = 2 - 1/2^n \, ,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 1/2^i = \lim_{n\to\infty} (2 - 1/2^n) = 2 \, .$$

La série $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ converge vers 2 et on peut écrire :

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i = 2 \, .$$

**Remarque.** Chacune des sommes partielles donne une approximation de la limite. On remarquera que la qualité des approximations augmente à mesure qu'on parcourt la suite des *sommes partielles* 1, 3/2, 7/4, 15/8, ...

---

**Exemple 1.2** La suite $1, 2, 3, 4, \ldots$ donne les termes de la série $\sum_{i=1}^{\infty} i$. Ses sommes partielles

$$\begin{array}{lclclcl}
s_1 & = & 1 & = & 1 & = & (1 \times 2)/2, \\
s_2 & = & 1 + 2 & = & 3 & = & (2 \times 3)/2, \\
s_3 & = & 1 + 2 + 3 & = & 6 & = & (3 \times 4)/2, \\
s_4 & = & 1 + 2 + 3 + 4 & = & 10 & = & (4 \times 5)/2,
\end{array}$$

vérifient : $s_n = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. Clairement $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, ce qui prouve que la série $\sum_{i=0}^{\infty} i$ diverge. Elle n'a pas de signification numérique.

---

**Exemple 1.3** La suite $1/(1\times 2), 1/(2\times 3), 1/(3\times 4), \ldots$ conduit à la série

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}\,.$$

Comme $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ (décomposition en fractions partielles), on a :

$$\begin{array}{rcl}
s_1 &=& \frac{1}{1(1+1)} &=& 1-\frac{1}{2} &=& 1-\frac{1}{2},\\
s_2 &=& \frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)} &=& \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) &=& 1-\frac{1}{3},\\
s_3 &=& \frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\frac{1}{3(3+1)} &=& \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) &=& 1-\frac{1}{4},\ldots
\end{array}$$

et, en général,

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\frac{1}{n+1}\,,
\end{aligned}$$

qui converge vers 1. On a donc $S=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)} = 1$. (Les séries où les termes adjacents se cancellent au moins partiellement sont dites “télescopiques”.)

Les somme partielles $1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ \ldots$ se rapprochent de plus en plus de la limite 1. Elle peuvent donc servir d'approximations de la série.

---

**Théorème 1.1.1 (Test de divergence)** *Si une série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge, on doit avoir $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$. Autrement dit, si $\lim_{i\to\infty} a_i \neq 0$, la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ diverge.*

**Exemple 1.4** La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ diverge car $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$. (C'est un peu comme si on additionnait une infinité de nombres tous très près de 1.)

---

**Attention !** Le fait que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ne garantit pas la convergence de la série correspondante. Ainsi, on ne peut rien dire de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ même si $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. (Nicole Oresme (1323–1382) a montré, par d'autres méthodes, qu'elle diverge.) Par contre, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge (vers $\pi^2/6$, comme l'a prouvé le grand mathématicien Léonard Euler (1707–1783)).

# Exercices

**1.1** Écrire les 4 premiers termes des séries :

a. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2-1}{i^2+1}$, b. $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{2+(-1)^j}{j^2}$, c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)\,!}$, d. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2^{2\ell}\cos(\ell\pi)}{(\ell+2)(\ell+1)}$,

e. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+a}{2m+a}$, (où $a \notin \mathbb{Z}$).

**1.2** Écrire les séries suivantes avec la notation $\Sigma$ :

a. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}+\dfrac{9}{10}+\cdots$, b. $1+\dfrac{4}{2}+\dfrac{9}{4}+\dfrac{16}{8}+\dfrac{25}{16}+\cdots$,

c. $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{13}+\cdots$, d. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{8}+\dfrac{6}{15}-\dfrac{24}{24}+\dfrac{120}{35}+\cdots$.

**1.3** Calculer les quatre premières sommes partielles. Essayer de trouver une formule pour $s_n$. Si possible, la prouver. (N.B. Plusieurs de ces séries sont “télescopiques”. Voir l'exemple 1.3.)

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$, b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$, c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+1/k)$, d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)$,

e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4k^2-1}$, *f. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k(k+1)(k+2)}$ g. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)\,!}$, h. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} e^{-x}\,dx$.

(Pour le (e) et (f), décomposer en fractions partielles).

**1.4** a. Soit $\displaystyle s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n-1}{n+1}$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle valeur ? Peut-on trouver $a_k$ ?

b. Questions similaires pour $\displaystyle s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k=5-\frac{n}{3^n}$.

**1.5** Que peut-on dire de la convergence des séries suivantes ?

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\pi/e)^k$, b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$, c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+3^k}{6^k}$, d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$,

e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\arctan k$, f. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$, g. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\ln\frac{k+1}{2k+1}$, h. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\,!+1}{(k+1)\,!}$,

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_1^k \frac{dx}{x}$.

### 1.1.2 Séries géométriques

Une suite de forme $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ est dite *géométrique*. Ces suites sont faciles à reconnaître : le rapport de deux termes consécutifs ne dépend pas du choix de ces deux termes. Il est égal à une certaine constante $r$ appelée la *raison* de la suite. (*Raison* est un terme ancien signifiant *rapport*.) Si une suite $a_0, a_1, \ldots$ vérifie (pour un certain $r$) :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \text{pour tout } n \geq 0\,,$$

la suite est géométrique de raison $r$.

La série associée $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est dite *géométrique*. Le résultat suivant intervient très souvent et servira de base à l'étude de la convergence de séries plus générales.

**Théorème 1.1.2** *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ une série géométrique de raison $r$.*
*Si $|r| < 1$, la série converge vers $a/(1-r)$.*
*Si $|r| \geq 1$, la série diverge.*

**Exemple 1.5**

- Le rapport de deux termes consécutifs de la série

$$3 + 3/2 + 3/4 + 3/8 + \cdots$$

est toujours $1/2$. Elle est donc géométrique de raison $r = 1/2$ et de premier terme $a = 3$. Comme $|r| = 1/2 < 1$, elle converge donc vers $3/(1-1/2) = 6$. On peut écrire

$$3 + 3/2 + 3/4 + 3/8 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 3/2^i = 6\,.$$

- La série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1/2 + 1/6 + 1/12 + \cdots$ n'est pas géométrique (rapports $1/3, 1/2, \ldots$ non constants).

- La série $2 - 6 + 18 - 54 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 2(-3)^i$ est géométrique de raison $r = -3$. Elle diverge.

- La série

$$\sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \, 8 \, \frac{3^{i-1}}{2^{2i-1}}$$

est géométrique de premier terme $(-1)^2 \, 8 \, \frac{3^{2-1}}{2^{2\times 2-1}} = 3$ et de raison $r = -3/4$. En effet, le rapport de deux termes consécutifs donne :

$$\frac{(-1)^{i+1} \, 8 \, \frac{3^{(i+1)-1}}{2^{2(i+1)-1}}}{(-1)^i \, 8 \, \frac{3^{i-1}}{2^{2i-1}}} = -\frac{3^i}{2^{2i+1}} \times \frac{2^{2i-1}}{3^{i-1}} = -\frac{3}{4}\,,$$

qui est constant. La série converge et on pourra écrire :

$$\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i\,8\,\frac{3^{i-1}}{2^{2i-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} 3\left(\frac{-3}{4}\right)^i = \frac{3}{1-\frac{-3}{4}} = \frac{12}{7}\,.$$

- La série $\sum_{i\geq 0} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots$ est géométrique de premier terme 1 et raison $x$ (ne dépend pas du choix des deux termes consécutifs). Elle converge seulement si $|x| < 1$ (i.e. $x \in ]-1,1[$) et diverge autrement. On a :

$$\sum_{i\geq 0} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour} \quad -1 < x < 1\,,$$

l'égalité devenant fausse (absurde, en fait) pour les autres valeurs de $x$.

---

### 1.1.3 Opérations élémentaires sur les séries

Dans une certaine mesure, les séries *convergentes* agissent comme des sommes finies. Ainsi :

- $\sum_{n\geq 0} a_n \pm \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0}(a_n \pm b_n)\,.$
- $K\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0} K a_n.$

Si on ôte (ou modifie) un nombre fini de termes à une série convergente, la nouvelle série reste convergente. Évidemment, sa valeur sera différente de celle de la série originale.

**Exemple 1.6** • L'exemple 1.1 montre que $\sum_{n\geq 0} 1/2^n = 2$. Si on néglige les termes correspondant à $n = 0, 1, 2$, on aura:

$$\sum_{n\geq 3} 1/2^n = \sum_{n\geq 0} 1/2^n - (1 + 1/2 + 1/4) = 2 - (1 + 1/2 + 1/4) = 1/4\,.$$

- De même, en utilisant aussi le résultat de l'exemple 1.3, on aura :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\left(5/2^n - \frac{3}{n(n+1)}\right) &= 5\sum_{n\geq 1} 1/2^n - 3\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} \\
&= 5\left(\sum_{n\geq 0} 1/2^n - 1/2^0\right) - 3\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} \\
&= 5\times(2-1) - 3\times 1 \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

- Ici, on peut décomposer en une somme de séries géométriques convergentes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq -1} \frac{5^n + (-2)^n}{10^n} &= \sum_{n\geq -1} \frac{5^n}{10^n} + \sum_{n\geq -1} \frac{(-2)^n}{10^n} \\
&= \frac{2}{1-1/2} + \frac{-5}{1+1/5} \\
&= -\frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

- On montre (voir plus loin) que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k\,!}$. Examinons ce qu'on peut dire de $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k\,!}$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k\,!} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k\,!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\,!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!} - \frac{1}{0\,!}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!} - \frac{1}{0\,!} - \frac{1}{1\,!}\right) \\
&= (e^1 - 1) + (e^1 - 1 - 1) \\
&= 2\,e - 3\,.
\end{aligned}$$

# Exercices

**1.6** Parmi les séries suivantes, lesquelles sont géométriques ? Parmi celles qui le sont, lesquelles convergent ? Pour celles qui convergent, donnez-en la somme.

a. $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(\sqrt{10})^{2k-1}}$, b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-3)^k(1/7)^{k+3}$, c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^k\left(\frac{5}{3}\right)^{2k-1}$,

d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{(\pi/2)^k}$, e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5k+1}{3k+1}\left(\frac{-3}{4}\right)^k$, f. $3+\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{100}+\cdots$,

g. $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{64}+\cdots$, h. $1-\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{16}-\dfrac{4}{64}+\cdots$.

**1.7** a. La série $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i$ est géométrique. D'après la formule $\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r}$, on devrait avoir : $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i = \frac{1}{1-2} = -1$. Pourtant, tous les termes de la série sont positifs. Qu'est-ce qui ne va pas ?

b. Soit $0 < r < 1$. Les séries $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$ et $\sum_{i=1}^{\infty}(1/r)^i$ sont géométriques. On devrait avoir : $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ et $\sum_{i=1}^{\infty}(1/r)^i = \frac{1/r}{1-1/r} = -\frac{1}{1-r}$. Donc $\sum_{i=0}^{\infty}(r)^i+\sum_{i=1}^{\infty}(1/r)^i = 0$. Qu'est-ce qui ne va pas ?

**1.8** Évaluez les séries suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{2}{3^{k-1}}\right)$, b. $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{2^k+3^k}{6^k}$, c. $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{2^{2k-1}+3^{k+1}}{6^k}$, d. $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{k\,2^k+3}{k\,!}$.

### 1.1.4 Critère de convergence : test de l'intégrale

**Théorème 1.1.3 (Critère de l'intégrale)** *Si $y = f(x)$ est une fonction* continue, positive et décroissante *pour $x$ assez grand (i.e. pour tout $x \geq b$ (pour un certain $b$ convenablement choisi)), alors :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \qquad et \qquad \int_b^{\infty} f(x)\, dx$$

*convergent toutes deux (mais pas nécessairement vers la même valeur) ou divergent toutes deux.*

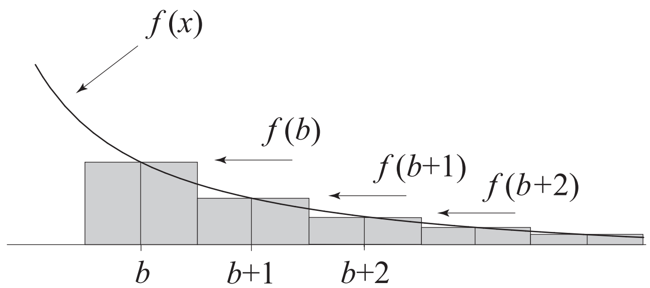



Fig. 1.1.4. $\sum_{k=b}^{\infty} 1 \times f(k)$ et $\int_b^{\infty} f(x)\, dx$ représentent presque la même aire.

**Preuve.** L'absence des premiers termes n'affecte pas la convergence de la série. On peut donc considérer la série tronquée $\sum_{k=b}^{\infty} f(k)$ en choisissant $b \geq 0$ de sorte que $f$ soit continue sur l'intervalle $[b-1, \infty[$. Comme $f$ est décroissante, on aura :

$$f(k) \geq f(x) \quad \text{pour} \quad k \leq x \leq k+1\,,$$

pour chaque entier $k \geq b$. En intégrant sur $[k, k+1]$, on trouve :

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geq \int_k^{k+1} f(x)\, dx\,.$$

On fait la somme :

$$\sum_{k=b}^{\infty} f(k) \geq \sum_{k=b}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_b^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

Si $\int_b^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, ce sera vers $\infty$ puisque $f(x)$ est positive sur $[b, \infty[$. On a donc $\sum_{k=b}^{\infty} f(k) = \infty$ et la série diverge.

D'autre part, si $\int_b^{\infty} f(x)\, dx$ converge, l'intégrale $\int_{b-1}^{\infty} f(x)\, dx$ converge aussi (leur différence étant finie). Comme précédemment, on montre que

$$\sum_{k=b}^{\infty} f(k) \leq \int_{b-1}^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

La série doit alors converger. □

**Remarque.** La preuve montre que

$$\int_b^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=b}^{\infty} f(k) \le \int_{b-1}^\infty f(x)\,dx\,. \tag{1.1}$$

Ceci permet de vérifier la qualité de l'estimation de la série par une de ses sommes partielles.

---

**Curiosité.** Le raisonnement s'applique aussi à des fonctions croissantes et des intervalles finis, moyennant certaines modifications. Par exemple, soit $f(x) = \ln x$ sur $[1, n+1]$. Cette fonction étant croissante, on a :

$$\int_{k-1}^{k} \ln x\ dx \le \ln k \le \int_k^{k+1} \ln x\ dx \quad \text{pour} \quad k \ge 2\,.$$

En sommant pour $2 \le k \le n$, on obtient l'équivalent de l'équation 1.1 :

$$\int_1^n \ln x\,dx \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_2^{n+1} \ln x\,dx\,.$$

On peut évaluer chaque membre de l'inégalité :

$$n\ \ln n - n + 1 \le \ln(n\,!) \le (n+1)\ \ln(n+1) - n + 1 - 2\ \ln 2\,.$$

En prenant l'exponentielle :

$$\frac{e\,n^n}{e^n} \le n\,! \le \frac{e\,(n+1)^{n+1}}{4\,e^n}\,. \tag{1.2}$$

Avec un raisonnement plus précis, on pourrait obtenir la formule de Stirling (1692–1770) :

$$n\,! \approx \sqrt{2\pi\,n}\ \frac{n^n}{e^n}\,. \tag{1.3}$$

---

**Exemple 1.7** Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Ici, $a_n = f(n) = 1/n$. La fonction définie par $f(x) = 1/x$ est continue, positive, décroissante pour $x \ge 1$ (disons). Comme $\int_1^\infty 1/x\,dx = \infty$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge.

---

**Exemple 1.8** Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Ici, $a_n = f(n) = 1/n^2$. La fonction définie par $f(x) = 1/x^2$ est continue, positive, décroissante pour $x \geq 1$. Comme $\int_1^{\infty} 1/x^2 \, dx = 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge.

Si on veut estimer la série, on pourrait procéder comme suit. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Or (par l'inégalité 1.1) :

$$\frac{1}{5} = \int_5^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{4}\,.$$

Bref, on a $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{9}{40} \pm \frac{1}{40}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{9}{40} \pm \frac{1}{40} = 1,6486 \pm 0,0252\,.$$

(Comme on a arrondi l'estimation, il faut en tenir compte dans l'évaluation de la marge d'erreur.) EULER a montré que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$, exactement.

---

**Exemple 1.9** Plus généralement, la fonction $\zeta$ de RIEMANN (que vous avez peut-être rencontrée sous le nom de série-p) est définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

On montre facilement qu'elle converge pour $s > 1$ et diverge pour $s \leq 1$.

L'importance de cette fonction réside dans le fait suivant, démontré encore par Euler :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

le produit ($\prod$) opérant sur tous les entiers premiers $p$. La fonction contient donc de l'information sur la distribution des premiers. L'hypothèse de Riemann, non résolue à ce jour, affirme que les zéros complexes non réels de cette fonction se trouvent sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ du plan complexe. La fondation Clay offre \$ 1 000 000 pour la solution de ce problème ... (Bonne chance !)

---

### 1.1.5 Critère de convergence : test du rapport

**Théorème 1.1.4 (d'Alembert)** *Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R$$

*alors la série converge si $R < 1$ et diverge si $R > 1$ (incluant $R = \infty$).*

**Preuve.** Commençons par le cas $R < 1$. On peut alors choisir une borne $B$ telle que $R < B < 1$. Comme $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R$, les rapports $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ seront tous au voisinage de $R$(du moins, pour $n$ à partir d'un certain rang $N$), de sorte que :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq B \quad \text{pour} \quad n \geq N\,.$$

Ainsi, on aura :

$$\begin{array}{rcccl}
|a_{N+1}| & \leq & B\,|a_N|, & & \\
|a_{N+2}| & \leq & B\,|a_{N+1}| & \leq & B^2\,|a_N|, \\
|a_{N+3}| & \leq & B\,|a_{N+2}| & \leq & B^3\,|a_N|, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
|a_{N+k}| & \leq & B\,|a_{N+k-1}| & \leq & B^k\,|a_N|, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

On a donc $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty} B^k\,|a_N|$, une géométrique (de raison $B$ avec $0 < B < 1$) qui converge (vers $|a_N|/(1-B)$). Donc la série complète $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. (On peut alors montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.)

Le cas $R > 1$ se traite de façon similaire. On montre que la série tronquée est plus grande qu'une géométrique qui diverge… □

**Remarques.**

- Le test ne permet pas de conclure quand $R = 1$.
- Le rapport $|a_{n+1}/a_n|$ fait intervenir deux termes *consécutifs* de la série. Dans le cas d'une série géométrique, ce rapport est la valeur absolue de la raison.

**Exemple 1.10** a. Pour $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$, on a $a_n = 1/2^n$. Donc $R = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = 1/2 < 1$. La série converge.

b. Pour $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)/2^n$, on a :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\,\frac{n+2}{2^{n+1}}}{(-1)^n\,\frac{n+1}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}=1/2<1\,.$$

La série converge.

c. Pour $0\,!+1\,!/3+2\,!/3^2+3\,!/3^3+\cdots=\sum_{n\geq 0}n\,!/3^n$, on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)\,!}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{n\,!}\right|=\frac{n+1}{3}\to\infty\,.$$

Comme $R=\infty>1$, la série diverge.

d. La série $1-x^2/2\,!+x^4/4\,!-x^6/6\,!+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n)\,!$ converge (quelque soit le nombre $x$) puisque :

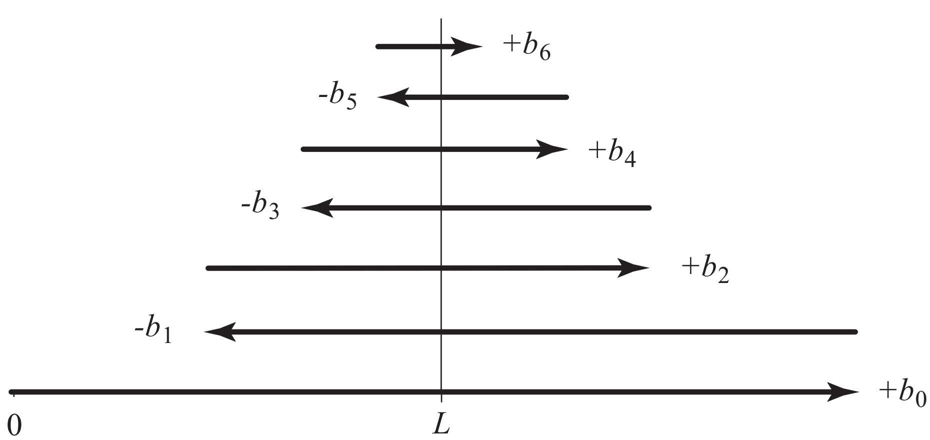
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)\,!}\frac{(2n)\,!}{x^{2n}}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\right|=0<1\,.$$

### 1.1.6 Séries alternées

**Théorème 1.1.5 (Leibniz)** *Si les termes $b_i$ d'une suite sont* positifs et décroissent en tendant vers 0, *alors la série alternée*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i b_i$$

*converge. De plus, si elle converge vers le nombre $L$, alors les sommes partielles $s_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i$ vérifient :* $|\,L-s_n\,|\leq b_{n+1}$.



**Remarque.** La quantité $L - s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^i b_i$ est ce qui manque à $s_n$ pour atteidre $L$. C'est l'erreur commise en replaçant $L$ par $s_n$ (*erreur d'approximation*). Ainsi le théorème permet de borner l'erreur d'approximation faite en remplaçant une série par une de ses sommes partielles.

Plus précisément, *pour une série alternée convergente* $L = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i b_i$, l'erreur produite en l'estimant par $s_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i$ ne dépasse pas $b_{n+1}$, le premier terme *non utilisé* de la série.

**Exemple 1.11** a. La série alternée $L = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}/(2i-1)$ converge car, $b_i = 1/(2i-1) > 0$ forme une suite décroissante qui converge vers 0 (quand $i \to \infty$).

b. On peut estimer $L$ par une somme partielle, disons

$$s_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} = 1 - 1/3 + 1/5 = 0,86666\ldots .$$

L'erreur ne dépasse pas $b_4 = 1/7 \approx 0,14286$. On a donc $L = 0,86666\ldots \pm 0,14286$.

c. On obtient une meilleure approximation en prenant plus de termes. Ainsi

$$s_5 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 = 0,83492\ldots$$

donne une estimation de $L$ avec une erreur qui ne dépasse pas $b_6 = 1/11 \approx 0,09091$. On peut donc écrire $L = 0,83492\ldots \pm 0,09091$.

d. Si on voulait estimer $L$ par $s_n$ de sorte que l'erreur ne dépasse pas $0,01$, il suffirait que $b_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \leq 0,01$ (on ne prend aucune chance). Donc $2n+1 \geq 100$, ou $n \geq 49,5$. Il faudrait prendre au moins 50 termes (méchant calcul !).

e. En fait, on peut montrer que $L = \pi/4 \approx 0,785398\ldots$, ce qui est cohérent avec les deux premières estimations.

---

**Exemple 1.12** Estimer $S = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i/i\,!$ (a) avec 4 termes, (b) à $10^{-3}$ près.

**Solution.** a. La série est alternée et converge (car $b_i = 1/i\,!$ est positive, décroissante, avec $b_i = 1/i\,! \to 0$). (La série représente donc un nombre bien défini.) On a :

$$S = (1 - 1/1\,! + 1/2\,! - 1/3\,!) \pm 1/4\,! = 1/3 \pm 1/24\,.$$

b. L'incertitude introduite en remplaçant $S$ par un de ses sommes partielles $s_n$ est $b_{n+1} = 1/(n+1)\,!$. On doit avoir $1/(n+1)\,! \leq 10^{-3}$, i.e. $(n+1)\,! \geq 10^3$, ce qui est atteint pour $n \geq 6$ (qu'on trouve par évaluation numérique de la suite croissante $(n+1)\,!$). Autrement dit,

$$S = (1 - 1/1\,! + 1/2\,! - 1/3\,! + 1/4\,! - 1/5\,! + 1/6\,!) \pm 1/7\,! \approx 0,368\ldots \pm 0,001\,.$$

(En fait, $S = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i/i\,! = 1/e \approx 0,3678794\ldots$ ; comparez.)

---

**Exemple 1.13** La fonction de Bessel d'ordre 0,

$$J_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(x/2)^{2i}}{(i\,!)^2}\,,$$

apparaît dans l'étude des vibrations. Estimer $J_0(2)$ à $10^{-4}$ près.

**Solution.** La série alternée $J_0(2) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i/(i\,!)^2$ converge car $b_i = 1/(i\,!)^2$ est positive, décroissante, avec $1/(i\,!)^2 \to 0$.

L'incertitude introduite en remplaçant $J_0(2)$ par un de ses sommes partielles $s_n$ est $b_{n+1} = 1/((n+1)\,!)^2$. On doit avoir $1/((n+1)\,!)^2 \leq 10^{-4}$, i.e. $(n+1)\,! \geq 10^2$, ce qui est atteint pour $n \geq 4$ (tâtonnement). Autrement dit,

$$J_0(2) = (1 - 1/(1\,!)^2 + 1/(2\,!)^2 - 1/(3\,!)^2 + 1/(4\,!)^2) \pm 10^{-4} = 0,223958\ldots \pm 0,0001\,.$$

---

**ATTENTION !** Nous n'étudions ici que l'incertitude produite en tronquant une série. D'autres sources importantes d'incertitude dont nous n'avons pas tenu compte, sont les erreurs d'arrondis. En effet une calculatrice ne peut manipuler qu'un nombre fini de décimales. Pour des calculs simples, ces incertitudes sont négligeables la plupart du temps. Si les calculs font intervenir plusieurs opérations (comme dans le type de calculs que nous avons abordé), ces erreurs peuvent s'accumuler, parfois s'amplifier, au point que le résultat affiché ne soit qu'une suite aléatoire de chiffres, un résultat inutilisable. Dans un cours d'*analyse numérique* plus avancé, on pourait apprendre à contrôler (dans une certaine mesure) ce type d'erreur.

---

# Exercices

**1.9** Étudiez la convergence des séries suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2k+1}$, b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{e^k}$, c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$,

d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$, e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k-1}{(\sqrt{3})^k}$, f. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k+1}{7^{k+1}+2}$,

g. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$, h. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2 k}$, i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$,

j. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(k+1)!}{(2k+1)!}$, k. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(k+1)!}{(2k+1)!}5^{k/2}$, l. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}k$,

m. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)!}$, n. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k+2}{(2^k+1)(3^k+1)}$, o. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{2k+1}}$,

p. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$, q. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left((1/2)^k + 1/k^2\right)$, *r. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)}\frac{1}{2^k}$,

*s. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

**1.10** Parmi les séries suivantes, lesquelles sont alternées ? Parmi celles qui le sont, lesquelles convergent ?

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n\sqrt{n}$, b. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n/n^2$, c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$,

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{n+1}{n+2}$, e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, f. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{2k+1}}$,

g. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, h. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2}\,2^n$, i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,x^n/n$,

j. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\int_{-1}^{0} x^n\,dx$.

**1.11** Considérons la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}/n^2$.

a. Donnez-en une estimation en utilisant ses 4 premiers termes.
b. Estimez l'erreur d'approximation.
c. Combien de termes faut-il prendre pour avoir une précision de $10^{-4}$ ?

**1.12** Même question qu'au numéro 1.11 pour la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n/(2n)!$

## 1.2 Séries entières

Les séries (de puissances) entières permettent d'estimer des *fonctions* plutôt que des nombres, comme c'était le cas précédemment. Il existe de nombreux types de séries qui jouent ce rôle, notamment :

- les séries entières, utilisées pour estimer une fonction près d'une *valeur particulière* de la variable.
- les série de Chébychev, utilisées dans les calculateurs pour estimer une fonction sur tout un *intervalle*.
- les séries asymptotiques qui estiment une fonction pour des *valeurs très grandes* de la variable.
- les séries de Fourier, qui permettent de décomposer un mouvement oscillant en harmoniques (mouvement sinusoïdaux de fréquences multiples d'une fréquence fondamentale).
- les séries de Dirichlet, utilisées en théorie analytique des nombres.
- les séries de Laurent, de Lambert ...

Les séries entières sont les plus élémentaires. Nous abordons leur étude.

### 1.2.1 Théorie des séries entières

Une *série entière* est une série de forme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \,,$$

où les *coefficients* $c_n$ ne dépendent pas de $x$. On dit que la série est *centrée en* $x = a$ ou qu'elle constitue un développement *autour de* $a$. Autrement dit, seules les *puissances entières non-négatives* de $x$ ou de $x - a$ peuvent apparaître (peut-être sous la forme $Ax + B$).

Pour faciliter l'écriture, on convient que $(x - a)^0 = 1$ même quand $x = a$.

Si on évalue la série $S(x)$ en $x = a$, nous obtenons $S(a) = c_0$. La série est donc convergente quand $x = a$. Pour quelles autres valeurs de $x$ la série $S(x)$ converge-t-elle ? Il faudrait en principe étudier la convergence de la série *pour chaque valeur de* $x$.

**Exemple 1.14** La série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots$$

est géométrique de raison $R = (x-2)/2$. Elle converge donc pour tout $x$ tel que $|x-2|/2 < 1$ (i.e. pour $0 < x < 4$) et diverge pour les autres valeurs. On dit que $]0, 4[$ est l'*intervalle de convergence* de la série. Remarquez que le *centre de l'intervalle* est $a = 2$.

Comme la série est géométrique, on connaît sa somme :

$$S(x) = \frac{1}{1-(x-2)/2} = \frac{2}{4-x} \qquad \text{(pour } 0 < x < 4\text{)}.$$

Ainsi, prenons $x = 3$. La série donne :

$$S(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{4-3} = 2\,.$$

Par contre, avec $x = 6$, on a :

$$S(6) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \neq \frac{2}{4-6} = -1\,,$$

puisque la série diverge manifestement. L'égalité

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n} = \frac{2}{4-x}$$

n'est valide que pour $0 < x < 4$.

---

**Moralité.** L'égalité $\sum_{k\geq 0} c_k(x-a)^k = f(x)$ entre une série et une fonction $f$ n'est valide que pour $x$ dans l'intervalle de convergence de la série.

**Exemple 1.15** Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n\,!$. Le rapport donne (pour chaque $x$ fixé) :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} \frac{n\,!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0\,.$$

Comme $R < 1$, la série converge quel que soit $x$. La série converge sur $\mathbb{R}$.

---

Dans les exemples précédents, on a remarqué que les séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

(centrées en $x = a$) semblent converger sur un *intervalle* lui-même *centré en* $x = a$. Est-ce toujours le cas ?

En général, le test du rapport donne :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |x-a|\, L\,,$$

pour un certain $L \geq 0$ (qui peut être $\infty$). On a donc (en posant $r = 1/L$ pour simplifier) :

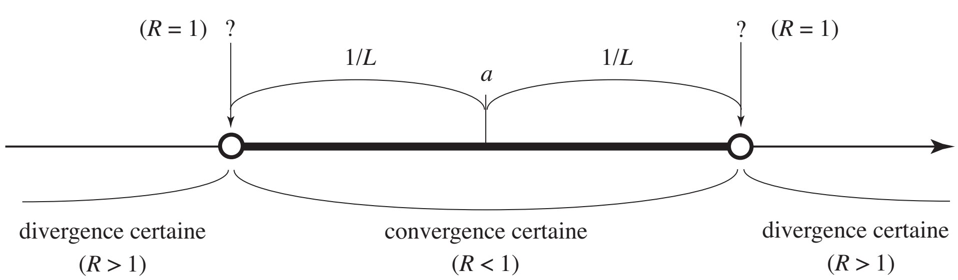
- convergence pour $|x-a|L < 1$. Cette inégalité donne $a - r < x < a + r$. Pour ces valeurs de $x$ la convergence est certaine.

- divergence pour $|x-a|L > 1$. On trouve $a - r > x$ ou $x > a + r$. Pour ces valeurs de $x$ la divergence est certaine.

- statut inconnu pour $|x-a|L = 1$. Autrement dit, pour $x = a \pm r$, le test ne permet pas de conclure. Remarquons que ces valeurs sont les bornes des deux ensembles précédents.

L'ensemble de convergence a donc la forme $]a-r, a+r[$, les bornes pouvant être (ou non) incluses. On voit donc que cet ensemble est toujours un intervalle centré en $x = a$. L'intervalle peut être $\mathbb{R}$ (si $L = 0$, $r = \infty$), ou réduit à $\{a\}$ si $L = \infty$ ($r = 0$).

La distance $r = 1/L$ du centre $a$ de l'intervalle à l'un de ses bords est le *rayon de convergence* de la série.



### 1.2.2 Opérations sur les séries entières

Deux opérations prennent des formes particulièrement simples si on les effectues sur des séries entières. Premièrement, on peut *dériver* terme à terme. Le résultat donne une série entière dont l'intervalle de convergence est le même que celui de la série de départ, sauf peut-être aux bornes de l'intervalle.

En effet, si la série est $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, sa dérivée est $\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n(x-a)^{n-1}$. Le test du rapport donne pour cette dernière :

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\, c_{n+1}(x-a)^n}{n\, c_n(x-a)^{n-1}} \right| \\ &= |x-a| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \\ &= |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| , \end{aligned}$$

soit le même rapport que pour la série de départ.

On peut aussi *intégrer* (souvent de $a$ à $x$, pour $x$ à l'*intérieur* de l'intervalle de convergence). On retrouve le même intervalle de convergence, sauf peut-être aux bornes.

**Exemple 1.16** La série géométrique

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

converge (seulement) si $-1 < t < 1$. Sa dérivée donne :

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n$$

qui converge elle aussi pour $-1 < t < 1$. Clairement, elle diverge pour $t \notin ]-1, 1[$.

Ainsi (en prenant $t = 1/2$), on trouve

$$1 + 2 \times 1/2 + 3\,(1/2)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1/2)^n = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4\,.$$

---

**Exemple 1.17** Si, au contraire, on intègre la série de départ, on trouve :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = \int_0^x 1\, dt + \int_0^x t\, dt + \int_0^x t^2\, dt + \cdots$$

qui se simplifie en :

$$-\ln(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \,. \tag{1.4}$$

Le test du rapport donne (pour chaque $x$ fixé) :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \, \frac{n}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \, \frac{n}{n+1} = |x| \,.$$

Comme prévu, le test nous garantit que la série converge si $R = |x| < 1$, i.e. pour $-1 < x < 1$, (centre en $a = 0$). La série diverge si $|x| > 1$ (i.e. pour $x < -1$ ou $x > 1$). Le test ne permet pas de conclure pour $x = -1$ ou en $x = 1$ (cas où $R = 1$). Il faut tester séparément ces valeurs :

- pour $x = -1$, la série devient $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$, qui converge (test des séries alternées).
- pour $x = 1$, la série devient $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ qui diverge (c'est la série harmonique).

L'intervalle de convergence est donc précisément $[-1, 1[$.

---

**Remarque.** Ces deux opérations (dérivation/intégration) ne sont pas toujours "légales" pour des séries quelconques. Ainsi, soit

$$a_n(x) = (n+1)\,(n+2)\,x^n\,(1-x)\,.$$

On pourrait montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 0} (a_n(x) - a_{n+1}(x))\,dx \neq \sum_{n\geq 0} \int_0^1 (a_n(x) - a_{n+1}(x))\,dx\,.$$

Pour des séries entières, cependant, il n'y a pas de problèmes, du moins sur l'intervalle de convergence commun de ces séries.

---

Une autre opération utile, la *substitution* (composition de fonctions). À utiliser moyennant certaines précautions...

**Exemple 1.18** On peut substituer $x = -(t-1)$ dans la série précédente (1.4), ce qui donne (après changement de signe) :

$$\ln(t) = (t-1) - (t-1)^2/2 + (t-1)^3/3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(t-1)^n}{n} \,.$$

Pour l'intervalle de convergence, inutile de repasser par la batterie de tests. Comme la série (1.4) converge pour $-1 \leq x < 1$ et seulement ces valeurs, la nouvelle série converge pour $-1 \leq -(t-1) < 1$ qui se simplifie en $0 < t \leq 2$.

---

**Exemple 1.19 (Série de Gregory, calcul de $\pi$)** La série

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

converge pour $-1 < x < 1$. En substituant $x = -t^2$, on trouve :

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

qui converge si $-1 < -t^2 < 1$ ; c'est à dire, si $t^2 < 1$ ; ou mieux, pour $-1 < t < 1$.

Si on intègre terme à terme (de 0 à $x$, pour $x \in ]-1, 1[$), on obtient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x 1\, dt - \int_0^x t^2\, dt + \int_0^x t^4\, dt + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt\,,$$

d'où :

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,. \tag{1.5}$$

L'intervalle de convergence du résultat est $[-1, 1]$ (la série est alternée aux deux bornes). En faisant tendre $x$ vers $1^-$, on a :

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots\,,$$

ce qui permet de calculer $\pi$ par la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Malheureusement, c'est très inefficace : par le critère de Leibniz, l'erreur produite en remplaçant $\pi/4$ par $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k/(2k+1)$ ne dépasse pas $1/(2n+3)$. Pour atteindre une précision de $10^{-4}$, il faudrait que $1/(2n+3) \leq 10^{-4}$, ce qui correspond à au moins 5000 termes ! (Voir l'exemple 1.11.) Cependant, si on remarque que :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan 1/2 + \arctan 1/3\,,$$

on aura une convergence nettement plus rapide des séries (1.5) correspondantes (pourquoi ?).

---

# Exercices

**1.13** Parmi les séries suivantes, lesquelles sont des séries entières ? Pour celles qui le sont, étudiez leur convergence. (Laissez tomber l'étude de la convergence aux bornes des numéros k, t et u.)

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$, c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2-2)^n}{n}$,

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, e. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,!\,(x+2)^n$, f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x\ln x)^n$,

g. $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2-2)^n}{n+2}$, h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{n(n+1)}$, i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$,

j. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)\,!}$, k*. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n\,!)^2 (x-1)^n}{(2n)\,!}$, l. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-9)^n}{(2n)\,!\,3^{2n+1}}$,

m. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-9)^n}{3^{2n+1}}$, n. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{4^n(n+1)}$, o. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(x+1)^n}$,

p. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$, q. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{\sqrt{n+1}}$, r. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n\, x^n}{(n+1)^{3/2}}$,

s. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2-3)^n}{\sqrt{n^2+1}}$, t*. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n\,!)^3\, x^{3n}}{(3n)\,!}$, u*. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

**Rappel.** (Pour le # u :) Les coefficients du *binôme* $\binom{\alpha}{n}$ sont définis par :

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\cdots\,(\alpha-n+1)}{n\,!},$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On remarquera que si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $n > \alpha$, on a $\binom{\alpha}{n} = 0$, puisqu'alors, $\alpha$ est un des entiers $0, 1, \ldots, n-1$.

**1.14** Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ converge pour $x = -3$ mais diverge pour $x = 5$. Que peut-on dire de la convergence des séries suivantes ?

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(-4)^n$, c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(-2)^n$, d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, 6^n$, e. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$.

**1.15** Trouvez la somme des séries suivantes :

a. $x + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + \cdots$ ,

b. $x - x^2 - x^4 + x^5 + x^7 - x^8 - x^{10} + x^{11} + \cdots$ ,

c. $1 + 2x + 3x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + x^9 + \cdots$ .

(Sugg.: elles s'expriment comme des combinaisons linéaires de séries géométriques bien choisies.)

**1.16** On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k\,!} .$$

a. Montrez que cette série converge sur $\mathbb{R}$.

b. Montrez qu'elle vérifie $f'(x) = f(x)$ (pour $x \in \mathbb{R}$) avec $f(0) = 1$.

c. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k\,!} = e^x .$$

**1.17** À l'exercice précédent, nous avons établi l'égalité :

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k\,!} .$$

En utilisant ce résultat, trouvez des séries (certaines de centre autre que 0) pour les fonctions :

a. $e^{x-1}$ , b. $\sqrt{e^{3x}}$ , c. $x\,e^x$ , d. $\dfrac{e^x - 1}{x}$ , e. $e^{-x^2}$ , f. $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ .

**1.18** En utilisant $e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k\,!}$ :

a. Estimez $e^{-1}$ à l'aide d'une somme partielle (alternée) utilisant 4 termes. Estimez aussi l'imprécision.

b. Combien de termes faudrait-il pour estimer $e^{-1}$ à $10^{-5}$ près ?

c. Estimez $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ à l'aide de la somme partielle (alternée) utilisant 4 termes. Estimez aussi l'imprécision.

d. Combien de termes faudrait-il pour estimer $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ à $10^{-5}$ près ?

**1.19** En admettant que $e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ est valide aussi sur $\mathbb{C}$,

a. Trouvez la série de $e^{i\theta}$ sous la forme
$$e^{i\theta} = (\text{série partie réelle}) + i\,(\text{série partie imaginaire})\,.$$

b. Sachant que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$ (formule de DE MOIVRE), en déduire les séries de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

**1.20** Partant de la série géométrique $(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^i$, démontrez que :

a. $(1-x)^{-2} = \sum_{i\geq 0}(i+1)\,x^i$,

b. $(1-x)^{-3} = \sum_{i\geq 0} \frac{(i+2)(i+1)}{2!}\,x^i$,

c. $(1-x)^{-4} = \sum_{i\geq 0} \frac{(i+3)(i+2)(i+1)}{3!}\,x^i$.

Il semble donc que $(1-x)^{-(n+1)} = \sum_{i\geq 0} \binom{i+n}{n}\,x^i$.

**1.21** Utilisez la série géométrique et ses dérivées (exercice 1.20) pour obtenir les séries (centrées en 0) de :

a. $\dfrac{x}{(1-x)\,(1-2x)}$, b. $\dfrac{x}{1+x-6x^2}$, c.* $\dfrac{x}{(1-x)\,(1-x^2)}$.

(Sugg.: décomposez en fractions partielles.)

**1.22** * On lance un dé autant de fois que nécessaire pour obtenir un premier “6”.

a. Montrez que la probabilité $p_k$ que le premier 6 apparaisse au $k$-ième lancer est
$$p_k = \frac{5^{k-1}}{6^k}\,.$$

b. Considérons la série $P(x) = \sum_{k\geq 1} p_k\,x^k$. Montrez qu'on a $P(1) = 1$. Pourquoi ce résultat est-il prévisible ?

c. Montrez que l'espérance du nombre de lancers nécessaires (nombre moyen de lancer) est :
$$1\,p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + 4\,p_4 + \cdots = \sum_{k\geq 1} k\,p_k\,.$$

d. En déduire que l'espérance est $P'(1)$. Quelle est cette valeur ?

**1.23** Soit $\sum_{i\geq 0} a_i\,x^i$ et $\sum_{i\geq 0} b_i\,x^i$ deux séries de Maclaurin dont les rayons de convergence sont respectivement $r_a$ et $r_b$.

a. Que peut-on dire du rayon de convergence $r$ de $\sum_{i\geq 0}(a_i\,b_i)\,x^i$ ?

b. Si les séries étaient centrées toutes trois en $a$ plutôt qu'en 0, aurait-on les mêmes résultats ?

## 1.3 Séries de Taylor-Maclaurin à une variable

### 1.3.1 Définitions

Vous connaissez bien sûr la linéarisation $L(x)$ d'une fonction $y = f(x)$ près d'un point $x = a$. (Même dans le cas d'une fonction à plusieurs variables $z = f(x, y)$.)

Comme la tangente passe par le point $(a, f(a))$ et qu'elle a une pente de $f'(a)$, son équation de la tangente sera

$$L(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)\,.$$

Cette tangente ressemble à la fonction, du moins pour $x$ assez près de $a$. On devrait donc avoir $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)\,.$

**Exemple 1.20**

- Ainsi, la linéarisation de $f(x) = \sin x$ en 0 donne

$$\begin{aligned} L(x) &= 0 + 1\,(x - 0) \\ &= x\,. \end{aligned}$$

  On a donc $\sin x \approx x$ pour $x$ assez près de 0.

- Similairement, la linéarisation de $\ln x$ autour de $x = 1$ est

$$\begin{aligned} L(x) &= \ln 1 + (1/x|_{x=1})(x - 1) \\ &= x - 1\,. \end{aligned}$$

  On a donc $\ln x \approx x - 1$ pour $x$ assez près de 1.

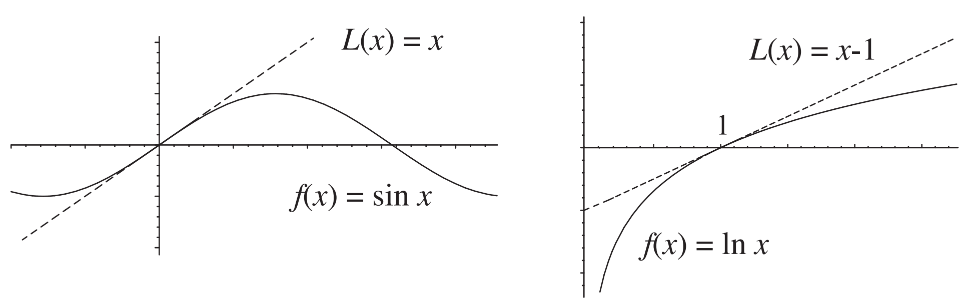



**fig. 1.20.** La linéarisation $L(x) = x$ de $\sin x$ (autour de $x = 0$) et $L(x) = x - 1$ de $\ln x$ (autour de $x = 1$).

Clairement, $L(x) = x$ donne une bonne approximation de $\sin x$ pour $x$ est assez près de 0. Inversement la qualité de l'approximation diminue si on s'éloigne trop de 0. De même pour la linéarisation de $\ln x$ si $x$ est près de 1.

---

Si une droite ressemble à la fonction à approcher, une parabole bien choisie devrait ressembler encore plus à cette fonction. On cherche alors un polynôme quadratique $P_2(x)$ qui donne une bonne approximation de la fonction $y = f(x)$ pour $x$ assez près d'une valeur $a$. On aimerait

- que ce polynôme passe par le point $(a, f(a))$ (i.e. $P_2(a) = f(a)$),
- qu'il ait même pente que la fonction en $x = a$ (i.e. $P_2'(a) = f'(a)$) et
- aussi même concavité en $x = a$ (i.e. $P_2''(a) = f''(a)$).

Vous pouvez vérifier que

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)\,\frac{(x-a)}{1\,!} + f''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2\,!} \tag{1.6}$$

répond à toutes ces exigences.

**Exemple 1.21**

- L'approximation quadratique de $\sin x$ autour de $x = 0$ est

$$P_2(x) = \sin 0 \;+\; (\cos 0)\,x \;+ (-\sin 0)\,\frac{x^2}{2\,!} = x\,,$$

  soit la même que l'approximation linéaire.

- L'approximation quadratique de $f(x) = \ln x$ autour de $x = 1$ est

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \ln 1 \;+\; (1/1)\,(x-1) \;+ (-1/1^2)\,\frac{(x-1)^2}{2} \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}\,. \end{aligned}$$

  Si on veut comparer la valeur de $\ln(1,2)$ avec sa valeur approchée, on pourra écrire

$$\ln(1,2) \approx P_2(1,2) = 0,180\,.$$

  La calculatrice donne $\ln(1,2) \approx 0,1823\ldots$ Encore une fois, si on s'éloigne trop, l'approximation perd en qualité. Ainsi, on a $P_2(2) = 0,50$ comparativement à $\ln 2 \approx 0,6931\ldots$ (voir ci-contre).

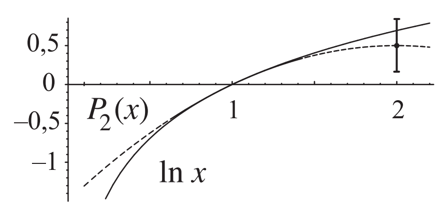



**fig. 1.21.** $P_2(x)$ (pointillés) autour de $x = 1$ associé à $\ln x$ (trait plein). La marge d'erreur est indiquée pour $x = 2$.

---

Prochaine étape : les approximations de degré 3 autour de $x = a$ d'une fonction $y = f(x)$. On cherche alors un polynôme $P_3(x)$ vérifiant $P_3(x) = f(a)$, $P_3'(x) = f'(a)$, $P_3''(x) = f''(a)$ et $P_3'''(x) = f'''(a)$. On voit facilement que

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)\,\frac{(x-a)}{1\,!} + f''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2\,!} + f'''(a)\,\frac{(x-a)^3}{3\,!}$$

répond bien à ces conditions (si la fonction $f$ se dérive au moins 3 fois). Il y aura des approximations similaires de d'importe quel degré : ce sont les polynômes de Taylor-Maclaurin.

**Définition 1.3.1** *Soit $f$ une fonction dérivable $n$ fois en $x = a$. Le* polynôme de Taylor-Maclaurin de degré $n$ centré en $a$ *(on dit aussi* autour de $a$*) associé à cette fonction est :*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)\,\frac{(x-a)}{1\,!} + \cdots + f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n\,!} \\ &= \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(a)\,\frac{(x-a)^k}{k\,!}\,. \end{aligned}$$

*Si $f$ est dérivable une infinité de fois en $x = a$ (i.e. si toutes ses dérivées existent pour $x = a$), on peut aussi lui associer la* série de Taylor-Maclaurin centrée en $a$ *:*

$$\begin{aligned} T(x) &= f(a) + f'(a)\,\frac{(x-a)}{1\,!} + f''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2\,!} + \cdots \\ &= \sum_{k\ge 0} f^{(k)}(a)\,\frac{(x-a)^k}{k\,!}\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

**Remarques.**

- Quand $a = 0$, on parle plus particulièrement de séries de Maclaurin.
- Par définitions des séries, on a

  $$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = T(x)\,.$$

  Les polynômes de Taylor sont les sommes partielles des termes de la série de Taylor correspondante.
- On peut se demander si

  $$T(x) = f(x)\,.$$

En effet, les polynômes de Taylor “ressemblent” beaucoup à la fonction associée, la ressemblance augmentant avec le degré. Pour la série de Taylor, on s’attend à ce que la ressemblance devienne tellement forte que la série devrait converger vers cette fonction. Après tout, comment pourrait-on augmenter la ressemblance après avoir tenu compte de toutes les dérivées ? Malheureusement, une série de Taylor ne converge pas toujours vers la fonction dont elle provient. On étudiera les conditions plus loin, à la section 2.1.

- Par leur ressemblance avec la fonction à évaluer, les polynômes de Taylor associés donneront cependant des approximations utiles de la fonction.

### 1.3.2 Quelques exemples

**Exemple 1.22 (Série de l’exponentielle)** Voyons toutes ces idées sur un exemple. Ainsi, nous avons construit, à l’exercice 1.16, une série entière associée à la fonction $f(x) = e^x$. Comme nous le verrons, cette série est précisément la série de Maclaurin de la fonction. En effet, $f(x) = e^x$ est infiniment dérivable autour de $x = 0$ et ses dérivées sont toutes $f^{(k)}(x) = e^x$. On a donc $f^{(k)}(0) = 1$.

- **Série et polynômes de Maclaurin.** La définition 1.7 donne la série :

$$\begin{aligned} T(x) &= 1 + 1\,\frac{(x-0)}{1\,!} + 1\,\frac{(x-0)^2}{2\,!} + 1\,\frac{(x-0)^3}{3\,!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k\,!}\,. \end{aligned}$$

Les polynômes de Maclaurin sont

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= 1 + x\,, \\ P_2(x) &= 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!}\,, \\ P_3(x) &= 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!}\,, \end{aligned}$$

et, en général

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + \frac{x}{1\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} \\ &= \sum_{0\leq k\leq n} \frac{x^k}{k\,!}\,. \end{aligned}$$

- **Étude de la convergence.** Le test du rapport donne :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)\,!}{x^n/n\,!}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\,\frac{n\,!}{(n+1)\,!} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0\,.$$

La série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- **Estimation.** On peut se servir des polynômes de Maclaurin pour estimer $e^x$. Par exemple

$$\begin{aligned} P_3(-0,3) &= 1+\frac{(-0,3)}{1\,!}+\frac{(-0,3)^2}{2\,!}+\frac{(-0,3)^3}{3\,!} \\ &= 0,74050\ldots\,, \end{aligned}$$

se compare avec le résultat donné par la calculatrice : $e^{-0,3} \approx 0,74082$.

---

**Exemple 1.23 (Série du cosinus)** Trouvons le développement de Maclaurin de $f(x) = \cos x$. Les dérivées de cette fonction sont

$$f^{(0)}(x) = \cos x,\quad f^{(1)}(x) = -\sin x,\quad f^{(2)}(x) = -\cos x,\quad f^{(3)}(x) = \sin x,$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x,\quad f^{(5)}(x) = -\sin x,\quad f^{(6)}(x) = -\cos x,\quad f^{(7)}(x) = \sin x, \ldots$$

Leur évaluation en $x = 0$ donne

$$f^{(0)}(0) = 1,\quad f^{(1)}(0) = 0,\quad f^{(2)}(0) = -1,\quad f^{(3)}(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(0) = 1,\quad f^{(5)}(0) = 0,\quad f^{(6)}(0) = -1,\quad f^{(7)}(0) = 0, \ldots$$

- **Polynômes et série de Maclaurin.** On a donc

$$\begin{aligned} P_0(x) = P_1(x) &= 1, \\ P_2(x) = P_3(x) &= 1-\frac{x^2}{2\,!}, \\ P_4(x) = P_5(x) &= 1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}, \\ P_6(x) = P_7(x) &= 1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}-\frac{x^6}{6\,!}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

La série de Maclaurin est

$$T(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}\,.$$

- **Intervalle de convergence.** Ici aussi la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le test du rapport donne en effet :

$$\left| \frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))\,!} \frac{(2k)\,!}{x^{2k}} \right| = \frac{x^2\,(2k)\,!}{(2k+2)\,(2k+1)\,(2k)\,!} = \frac{x^2}{(2k+2)\,(2k+1)} \to 0 < 1\,,$$

quand $k \to \infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- **Estimation.** Si nous voulions estimer $\cos 1$ à l'aide de $P_8(1)$, on aurait

$$\cos 1 \approx P_8(1) = 1 - \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{4\,!} - \frac{1}{6\,!} + \frac{1}{8\,!} \approx 0,540303\,,$$

ce qui est juste à $10^{-6}$ près.

---

**Exemple 1.24 (Série du logarithme)** La fonction $f(x) = \ln x$ est infiniment dérivable autour de $x = 1$. Elle possède donc des polynômes de Taylor de degrés quelconques centrés en 1 et une série Taylor centrée en 1. Or

$$\begin{array}{lll} f^{(0)}(x) = \ln x, & f^{(1)}(x) = x^{-1}, & f^{(2)}(x) = -1\,x^{-2}, \\ f^{(3)}(x) = 2\,x^{-3}, & f^{(4)}(x) = -2 \times 3\,x^{-4}, & f^{(5)}(x) = 2 \times 3 \times 4\,x^{-5}, \ldots \end{array}$$

i.e. $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)\,!\,x^{-k}$ pour $k \geq 1$. L'évaluation en $x = 1$ donne :

$$\begin{array}{lll} f^{(0)}(1) = 0, & f^{(1)}(1) = 1 = 0\,!, & f^{(2)}(1) = -1 = -1\,!, \\ f^{(3)}(1) = 2 = 2\,!, & f^{(4)}(1) = -2 \times 3 = -3\,!, & f^{(5)}(1) = 2 \times 3 \times 4 = 4\,!, \ldots \end{array}$$

qu'on peut résumer par

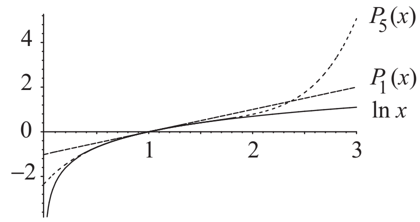
$$f^{(k)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (-1)^{k-1}(k-1)\,! & \text{si } k \geq 1 \end{cases}.$$

- **Polynômes et série de Taylor.** Les polynômes de Taylor sont

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 0 \\ P_1(x) &= (x-1), \\ P_2(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}, \\ P_3(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}\,, \end{aligned}$$

et, en général

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(1)\,\frac{(x-1)^k}{k\,!} \\ &= \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k-1}(k-1)\,!\,\frac{(x-1)^k}{k\,!} \\ &= \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k}\,. \end{aligned}$$




Comparez $P_1(x)$ et $P_5(x)$ dans l'intervalle de convergence $]0,2]$.

La série de Taylor est

$$T(x) = \sum_{k\ge 1} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

- **Intervalle de convergence.** Cette série converge sur l'intervalle $]0,2]$ (comme établi à l'exemple 1.18).
- **Estimation.** Supposons qu'on veuille estimer $\ln x$ en $x = 1,3$ par le polynôme de Taylor de degré 3 correspondant. On aurait

$$\begin{aligned} P_3(1,3) &= (1,3\,-\,1) - \frac{(1,3\,-\,1)^2}{2} + \frac{(1,3\,-\,1)^3}{3} \\ &= 0,264000\,. \end{aligned}$$

La calculatrice fournit $\ln 1,3 \approx 0,26236\ldots$.

---

**Exemple 1.25** Attention ! Certains développements n'existent pas. C'est le cas, dès l'ordre 1, du développement de $f(x) = x^{1/3}$ autour de $x = 0$ : la dérivée $f'(x) = (1/3)\,x^{-2/3}$ n'existe pas en $x = 0$.

Par contre, la fonction a un développement de Maclaurin de degré 0 et des développements de Taylor de tout degré autour de $a \neq 0$.

---

**Exemple 1.26** On veut approcher $\cos(33°)$ par le développement de degré 4 de $f(x) = \cos x$. Pour avoir le maximum de précision, devrions-nous le prendre autour de $x = 0$, de $x = \pi/6$ ou de $x = \pi/4$ ?

**Solution.** Pour un développement en puissances de $x - a$, on doit donc prendre $|x - a|$ le plus petit possible. Ici, $x = 33° = 33\,\pi/180$ est plus près de $a = \pi/6$ que des autres choix. Développer autour de $\pi/6$.

---

### 1.3.3 Constructions de séries à partir de séries connues

Notons,pour terminer, qu'on a souvent avantage à utiliser certaines opérations de base appliqués à des séries connues pour trouver d'autres développements de fonctions plus complexes. Outre les exemples 1.16 à 1.18, que vous devriez revoir, en voici un autre.

**Exemple 1.27** Soit à calculer un des polynômes de Maclaurin de la fonction

$$f(x) = -(\cos 3x)\ln(1-2x)\,.$$

- On peut évidemment appliquer la définition. La première dérivée est :

  $$f'(x) = \frac{2\cos 3x}{1-2x} + 3\,(\sin 3x)\ln(1-2x)\,.$$

  On peut calculer la seconde, mais la troisième sera certainement pénible à calculer.

- D'autre part, on peut partir de

  $$\cos x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)\,!}\,.$$

  pour trouver :

  $$\cos 3x = \sum_{k\geq 0} \frac{9^k\,x^{2k}}{(2k)\,!}\,.$$

  De même, le développement de $\ln x$ autour de $x = 1$ est

  $$\ln x = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k}\,,$$

  ce qui permet de trouver celui de $\ln(1-2x)$ :

  $$\ln(1-2x) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1}\,\frac{(-2x)^k}{k} = -\sum_{k\geq 1} \frac{2^k x^k}{k}\,.$$

  Il s'agit cette fois d'un développement autour de $x = 0$.

- Si on cherche le polynômes de degré 3 de la fonction $f$, il suffira de ne garder que les puissances ne dépassant pas 3 dans ces séries et d'en faire le produit :

$$\begin{aligned}
-(\cos 3x)\ln(1-2x) \quad &\approx \quad \overbrace{\left(1 - \frac{9\,x^2}{2\,!} + \text{termes de degré} \geq 4\right)}^{\cos 3x} \\
&\qquad \times \underbrace{\left(\frac{2\,x}{1} + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} + \text{termes de degré} \geq 4\right)}_{-\ln(1-2x)} \\
&= \quad 2\,x + 2\,x^2 + \frac{8\,x^3}{3} - 9\,x^3 + \text{termes de degré} \geq 4 \\
&= \quad 2\,x + 2\,x^2 - \frac{19\,x^3}{3} + \text{termes de degré} \geq 4
\end{aligned}$$

Le développement de degré 3 sera donc

$$P_3(x) = 2\,x + 2\,x^2 - \frac{19\,x^3}{3}\,.$$

N.B. Les développements de départ doivent être centrés au même point.

# Exercices

**1.24** Trouvez, si possible, les approximations linéaires et quadratiques des fonctions suivantes autour du point indiqué.

a. $1/x$, autour de $x = 1$ ,
b. $1/x$, autour de $x = 0$ ,
c. $\cos x$, autour de $x = \pi/4$ ,
d. $\tan x$, autour de $x = 0$ ,
e. $\arcsin x$, autour de $x = 0$,
f. $\arcsin x$, autour de $x = 1/2$ ,
g. $e^{\sin x}$, autour de $x = 0$,
h. $e^{-2x}\sin(3x)$, autour de $x = 0$.

**1.25** Soit $y = f(x)$ une fonction au moins deux fois dérivable en $x = a$. Démontrez que $P_2(x)$ défini à l'équation 1.6 vérifie $P_2(a) = f(a)$, $P_2'(a) = f'(a)$ et $P_2''(a) = f''(a)$

**1.26** a. Utilisez une approximation linéaire en $x = 0$ pour estimer $\arcsin(0,4)$.

b. Même question si on utilise l'approximation linéaire autour de $x = 1/2$.

c. Refaire ces deux exercices avec l'approximation quadratique.

**1.27** Utilisez le développement de $e^x$ autour de 0 pour trouver celui de :

a. $e^{3x}$, autour de $x = 0$,
b. $e^{2x-4}$, autour de $x = 2$,
c. $(e^x - 1)/x$, autour de $x = 0$,
d. $\int_0^x (e^t - 1)/t\,dt$, autour de $x = 0$.

**1.28** a. Trouvez la série de Maclaurin de $\sin x$.

b. Quel est son intervalle de convergence ?

c. L'utiliser pour trouver celui de

i. $\sin 2x$, ii. $\dfrac{\sin x}{x}$, iii. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

**1.29** a. Trouvez le développement de degré 3 de $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ autour de 0.

b. L'utiliser pour développer la fonction $g(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ en polynôme de Maclaurin de degré 6.

c. Utiliser ce dernier pour développer la fonction $h(x) = \arcsin x$ en polynôme de Maclaurin de degré 7.

**1.30** Trouvez, si possible, les premiers termes *non-nuls* du développement de Taylor-Maclaurin des fonctions suivantes autour du point indiqué. Vous pouvez parfois utiliser des séries connues.

a. $1/x$, en $x = 1$ (tous les termes),
b. $1/x$, en $x = 0$ (4 termes),
c. $\sqrt{1+x}$, en $x = 0$ (4 termes),
d. $\sqrt{1+x}$, en $x = -1$ (4 termes),
e. $(6+x)^{1/3}$, en $x = 2$ (3 termes),
f. $\cos x$, en $x = \pi/4$ (2 termes),
g. $\tan x$, en $x = 0$ (2 termes),
h. $(1+x)^\alpha$ en $x = 0$ (4 termes).

**1.31** a. Soit $f(x) = \arctan x$. Trouvez (à l'aide d'une série appropriée) les dérivées $f^{(15)}(0)$ et $f^{(16)}(0)$.

b. Soit $f(x) = \arctan 2x$. Trouvez (à l'aide d'une série appropriée) les dérivées $f^{(15)}(0)$ et $f^{(16)}(0)$.

c. Soit $f(x) = e^{x^2}$. Trouvez (à l'aide d'une série appropriée) les dérivées $f^{(15)}(0)$ et $f^{(16)}(0)$.

**1.32** a. Développez le polynôme $p(x) = x^4$ autour de 1.

b. Utilisez ce résultat pour développer $\frac{x^4}{(x-1)^5}$ en fractions partielles.

c. Adaptez cette démarche pour trouver le coefficient de $1/(x-2)^6$ dans le développement en fractions partielles de $\frac{(3-x)^7}{(x-2)^{10}}$.

d. Adaptez cette démarche pour trouver le coefficient de $1/(x-2)^6$ dans le développement en fractions partielles de $\frac{(3-4x+x^2)^3}{(x-2)^{10}}$.

**1.33** a. Utilisez le développement de $e^x$ autour de 0 pour trouver le polynôme de Taylor de degré 4 de $f(x) = e^{-x^2} + x^2$ (autour de 0).

b. Peut-on l'utiliser pour évaluer $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$ ?

c. Peut-on en déduire si $x = 0$ est une valeur critique de la fonction ? Si oui, de quel type (max, min, ...) ?

## 1.4 Approximations d'expressions symboliques

On utilise fréquemment le type d'approximations vu à la section précédente pour simplifier des expressions symboliques, particulièrement pour des valeurs extrêmes des certains paramètres. En voici quelques exemples.

**Exemple 1.28** Considérons l'expression

$$F(h) = \frac{\sqrt{L+h} - \sqrt{L}}{h} \,,$$

où $h$ et $L$ sont positifs. On peut être intéressé à manipuler cette expression pour de petites valeurs de $h$ (près de 0) par rapport à $L$. On aimerait alors utiliser une approximation de $F(h)$ plus commode pour les calculs. On pourrait par exemple remarquer que

$$\lim_{h \to 0^+} F(h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{L+h} - \sqrt{L}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{L}} \,,$$

ce qui suggère l'approximation

$$F(h) \approx \frac{1}{2\sqrt{L}} \quad \text{pour} \quad h \to 0^+ \,.$$

Cependant, cette approximation n'est pas toujours assez précise : elle ne montre pas comment $F(h)$ varie avec $h$. On préfère alors faire apparaître un terme contenant $h$. Voyons comment obtenir une telle expression.

Considérons l'approximation quadratique de $\sqrt{L+x}$ en 0 (avec $x = h$) :

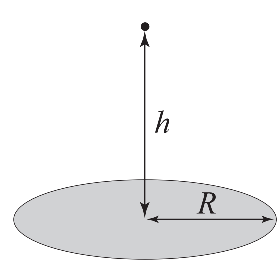
$$\sqrt{L+x} \approx \sqrt{L} + \frac{x}{2\sqrt{L}} - \frac{x^2}{8\sqrt{L^3}} \quad \text{pour} \quad x \to 0 \,.$$

On aura :

$$F(h) = \frac{\sqrt{L+h} - \sqrt{L}}{h} \approx \frac{\frac{h}{2\sqrt{L}} - \frac{h^2}{8\sqrt{L^3}}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{L}} - \frac{h}{8\sqrt{L^3}} \quad \text{pour} \quad h \to 0^+ \,.$$

---

**Exemple 1.29 (Potentiel d'un disque chargé)**




Un disque de rayon $R$ est chargé électriquement. Sa densité de charge $\rho$ est constante sur tout le disque. Le potentiel $U(h)$ en un point, situé à distance $h$ du centre du disque dans l'axe de celui-ci, vérifie :

$$U(h) = 2\pi\, K\, \rho \left( \sqrt{h^2 + R^2} - h \right) \,.$$

(On pourra facilement retrouver cette expression quand on étudiera les intégrales doubles en coordonnées polaires.)

- Cependant, pour $h$ assez *petit* par rapport au rayon $R$ du disque (i.e. pour $h \to 0^+$), les physiciens utilisent plus souvent une approximation plus commode de $U(h)$. L'approximation

$$U(h) \approx 2\pi\, K\, \rho\, R \quad \text{pour} \quad h \to 0^+$$

ne montre pas comment $U(h)$ varie avec $h$. On préfère alors faire apparaître un terme contenant $h$. Puisque $h \to 0^+$, il suffit de développer $\sqrt{R^2+x}$ (avec $x = h^2$) autour de 0 :

$$\sqrt{R^2+x} \approx R + \frac{x}{2R} \quad \text{pour} \quad x \to 0\,.$$

On a donc

$$U(h) \approx 2\pi\, K\, \rho \left( R + \frac{h^2}{2R} - h \right) \quad \text{pour} \quad h \to 0^+\,.$$

Comme le terme $h$ domine le terme en $h^2$ ($h \gg h^2$ pour $h \to 0^+$), il suffit de prendre :

$$U(h) \approx 2\pi\, K\, \rho\, (R - h) \quad \text{pour} \quad h \to 0^+\,.$$

- On peut examiner aussi le comportement de $U(h)$, pour $h$ assez *grand* par rapport au rayon $R$ du disque (i.e. pour $h \to \infty$). Pour trouver une bonne approximation dans ce cas, pas question d'un développement autour de $\infty$. Il faudrait trouver une expression équivalente de $U(h)$ qui fait apparaître un paramètre $x$ *petit* (i.e. $x \to 0$) quand $h \to \infty$. On peut essayer en factorisant $h$ le plus possible :

$$\begin{aligned} U(h) &= 2\pi\, K\, \rho \left( \sqrt{h^2+R^2} - h \right) \\ &= 2\pi\, K\, \rho \left( \sqrt{h^2 \left( 1 + \frac{R^2}{h^2} \right)} - h \right) \\ &= 2\pi\, K\, \rho\, h \left( \sqrt{1 + \left( \frac{R}{h} \right)^2} - 1 \right)\,. \end{aligned}$$

Gagné ! On a en effet $R/h \to 0$ quand $h \to \infty$. Il suffit donc d'estimer $\sqrt{1+(R/h)^2}$, qui s'obtient par linéarisation de $\sqrt{1+x}$ en $x = 0$. Or

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2\,,$$

ce qui donne

$$\sqrt{1+(R/h)^2} \approx 1 + R^2/(2\,h^2)\,.$$

On reporte dans l'expression de $U(h)$, pour conduire à :

$$\begin{aligned} U(h) &= 2\pi\,K\,\rho\,h\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}-1\right) \\ &\approx 2\pi\,K\,\rho\,h\left(1+\frac{R^2}{2\,h^2}-1\right) \\ &= \frac{\pi\,K\,\rho\,R^2}{h}\,, \end{aligned}$$

(valide seulement pour $h$ assez grand).

---

# Exercices

**1.34** Soit $F(h) = (\sqrt{L^2 + h^2} - L)/h$. En considérant $L$ fixe, trouvez-en une approximation valide pour

a. $h \to 0$, b. $h \to \infty$.

**1.35** D'après la théorie de la relativité, la masse $m$ d'une particule voyageant à vitesse $v$ est (pour un observateur au repos) :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

où $m_0$ est sa masse au repos (i.e. pour $v = 0$) et $c$, la vitesse de la lumière dans le vide. Son énergie est

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(formule archi-connue). Son énergie au repos est donc $E_0 = m_0 c^2$.

Utilisez une approximation linéaire de $(1 - x)^{-1/2}$ pour montrer que l'énergie requise pour l'amener du repos à la vitesse $v$ (considérée petite par rapport à celle de la lumière) est $E - E_0 \approx \frac{m_0 v^2}{2}$ comme dans la théorie classique.

**1.36** Un câble suspendu entre deux points semble prendre la forme d'une parabole. La théorie nous enseigne cependant que ceci n'est qu'une approximation : le câble prend plutôt la forme d'une *chaînette* dont l'équation est, par exemple, $y = a\,(e^{x/a} + e^{-x/a})/2$ (si le minimum est situé en $(0, a)$).

Trouvez l'approximation quadratique de cette fonction autour de 0.

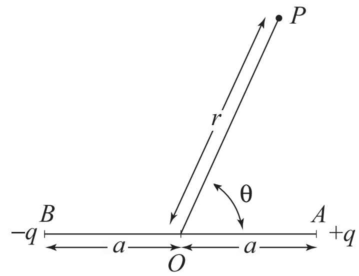
**1.37** Dans certaines situations, le potentiel en un point situé à distance $h$ d'un fil rectiligne de longueur $L$ uniformément chargé est donné par

$$U = K\,\ln\left|\frac{L + \sqrt{L^2 + h^2}}{h}\right|.$$

Donner une approximation du potentiel pour de grandes valeurs de $h$.

**1.38** Deux point $A$ et $B$ sont situés de part et d'autre et à égale distance $a$ d'un point $O$. On place une charge $q$ en $A$ et une charge $-q$ en $B$. On veut calculer le potentiel en un point $P$ situé à distance $r$ de $O$. On notera $\theta = \angle POA$.

Un peut de géométrie et de physique pour se réchauffer...




a. Trouvez une expression pour la distance de $P$ à $A$ (et une autre pour $P$ à $B$) en terme de $r$ et $\theta$.

b. Montrez que le potentiel en $P$ est donné par

$$U = K\,q\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ra\cos\theta + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2ra\cos\theta + a^2}}\right).$$

c. Trouvez une approximation du potentiel, valide pour $r$ *assez grand*, les autres paramètres étant fixes.

d. Quand $\theta \to \pi/2$, on voit que $U \to 0$. Trouvez une approximation du potentiel, valide pour $\theta$ près de $\pi/2$, les autres paramètres étant fixes.

**1.39** (Catastrophe de l'ultra-violet) Au XIX$^{\text{e}}$ siècle, on a trouvé expérimentalement que l'énergie de rayonnement du corps noir à température $T$ (en °K) est donnée, pour chaque longueur d'onde $\lambda$, par

$$E_{RJ} = \frac{8\pi\,kT}{\lambda^4}\,,$$

du moins, pour de très grandes longueurs d'onde (loi de Rayleigh-Jeans). Planck a corrigé cette formule pour tenir compte aussi des petites longueurs d'onde :

$$E_P = \frac{8\pi\,hc}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}\,.$$

Montrez que, pour $\lambda$ assez grand, on a bien $E_P \approx E_{RJ}$.

**1.40** (Longueur d'arc de l'ellipse) Considérons l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

d'excentricité $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ (où $a \geq b \geq 0$). Montrez que la longueur $L$ de l'ellipse est donnée par

$$L = 4\int_0^a \sqrt{\frac{1 - \epsilon^2\,(x/a)^2}{1 - (x/a)^2}} = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\theta}\;d\theta\,.$$

Cette intégrale ne se résout pas en terme de fonctions élémentaires (intégrale dite *elliptique*). Utilisez la linéarisation de $\sqrt{1-x}$ autour de 0 pour obtenir

$$L \approx 2\pi\,a\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right), \quad \text{pour} \quad \epsilon \to 0\,,$$

i.e. pour $a \approx b$.

# Section 2

# Étude avancée des séries de Taylor

## 2.1 Séries de Taylor et erreur d'approximation

Depuis le cours de calcul différentiel et intégral II, vous savez comment trouver des approximations de n'importe quel ordre à n'importe quelle fonction suffisamment dérivable. C'est ce que réalisent les sommes partielles d'une série de Taylor-Maclaurin. Ainsi, comme nous l'avons vu à l'exercice 1.22 et à l'exercice 1.16, la série de Maclaurin de $e^x$ est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots , \tag{2.1}$$

(nous montrerons bientôt que l'égalité est valide) ce qui, en posant $x = 1$, conduit à l'approximation

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} \approx 2,6666\ldots .$$

Comme on connaît d'avance la valeur de $e$ (avec une très bonne précision), on peut calculer l'erreur d'approximation :

- l'erreur absolue est $(e - 2,66666\ldots) \approx (2,71828\ldots - 2,66666\ldots) \approx 0,051615\ldots$ ;
- l'erreur relative est $(e - 2,66666\ldots)/e \approx 0,018988\ldots$, soit moins de 2% .

Évidemment, il n'est pas utile de calculer une si piètre approximation de $e$, alors que la calculatrice nous donne immédiatement une valeur beaucoup plus précise. Cependant, la calculatrice ne contient pas toutes les fonctions que vous pourriez utiliser (très loin de là). Par exemple, on pourrait évaluer $F(1/2)$, où

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt\,.$$

Rares sont les calculatrices qui possèdent cette fonction. Et il y en a d'autres encore plus étranges (fonctions de Bessel, de Mathieu, elliptiques,...

Pour le calcul qui nous occupe, on pourrait remplacer $x$ par $t^2$ dans l'équation 2.1

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2\,!} + \frac{t^6}{3\,!} + \cdots\,,$$

et intégrer de 0 à 1/2 :

$$\begin{aligned} F(1/2) = \int_0^{1/2} e^{t^2}\,dt &= \left.\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5\times 2\,!} + \frac{t^7}{7\times 3\,!} + \cdots\right)\right|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5\times 2\,!} + \frac{1}{7\times 2^7\times 3\,!} + \cdots \end{aligned}$$

Comme on ne peut effectivement calculer une somme infinie de termes, on pourrait se contenter d'une approximation par une somme partielle, disons avec les 2 premiers termes

$$\int_0^{1/2} e^{t^2}\,dt \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} = 0,5416666\ldots\ .$$

Comment pourrait-on savoir si cette approximation est bonne ? Les termes que nous avons négligés sont petits mais en grande quantité. Et avec seulement deux termes, n'obtenons-nous pas une estimation trop grossière ? Sommes-nous près ou loin de la vraie valeur de l'intégrale ? La situation est analogue à celle d'un archer aveugle qui n'aurait aucun moyen de savoir si ses flèches atteignent au moins la cible...

**Remarques.**

- L'erreur absolue $E$ entre une valeur $v$ et son approximation $a$ est $E = v - a$. L'erreur relative $\epsilon$ est $\epsilon = (v-a)/v$. Cette dernière est souvent donnée sous forme de pourcentage.
- Si la série à estimer est alternée, on peut évaluer l'erreur d'approximation à l'aide du critère de Leibniz, comme nous l'avons vu dans les sections précédentes (entre autres, la section 1.1.6) :

**Critère de Leibniz.** *Si les termes $b_i$ d'une suite sont* positifs et décroissent en tendant vers 0, *alors la série alternée*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i$$

*converge. De plus, si elle converge vers le nombre $L$, alors les sommes partielles $s_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i$ vérifient :* $|\, L - s_n \,| \leq b_{n+1}$.

Nous avions alors une borne $b_{n+1}$ pour l'erreur d'approximation $L - s_n$.

Dans les prochaines sections, nous allons apprendre à borner de manière assez semblable l'erreur d'approximation des séries de Taylor-Maclaurin même en l'absence d'alternance. On pourra alors contrôler la qualité de l'approximation.

### 2.1.1 Estimation de l'erreur d'approximation

**Exemple 2.1** La linéarisation de la fonction $f(x) = \sin x$ autour de $x = 0$ est $P_1(x) = x$. Quelle est l'erreur induite en remplaçant $\sin x$ par $P_1(x) = x$ ? Autrement dit, comment estimer $E_1(x) = f(x) - P_1(x) = \sin x - x$ ?

La dérivée seconde de la fonction est $f''(x) = -\sin x$. On sait que

$$-1 \leq f''(x) = -\sin x \leq 1\,.$$

Nous allons intégrer deux fois ces inégalités pour remonter jusqu'à la fonction.

Première intégration :

$$-\int_0^x dt \leq -\int_0^x \sin t \, dt \leq \int_0^x 1 \, dt\,,$$

qui donne :

$$-x \leq \cos x - 1 \leq x\,.$$

Deuxième intégration :

$$-\int_0^x t \, dt \leq \int_0^x (\cos t - 1) \; dt \leq \int_0^x t \, dt\,,$$

qui donne :

$$-\frac{x^2}{2} \leq \sin x - x \leq \frac{x^2}{2}\,.$$

Ces inégalités montrent que $\sin x \approx x = P_1(x)$ avec $|E_1(x)| \leq x^2/2$. On remarquera que la borne de l'erreur produite en utilisant $P_1(x)$ découle de la borne de la dérivée seconde $|f''(x)| \leq 1$. On peut évidemment partir de bornes sur les dérivées d'ordre supérieur à 2 pour obtenir des bornes pour $|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$. Le raisonnement s'applique aussi à d'autres fonctions avec des développements de Taylor-Maclaurin centrés en d'autres valeurs (voir la section 2.5).

---

**Théorème 2.1.1** *Soit $f$ une fonction dérivable $n$ fois en $x = a$ et $P_n(x)$ le polynôme de Taylor de degré $n$ centré en $a$ associé à cette fonction. Supposons que, pour une certaine constante $M$ (une borne), on ait $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ pour tout $t$ entre $a$ et $x$. Soit $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $P_n(x)$. On a*

$$|E_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Exemple 2.2** Illustrons le théorème sur la fonction précédemment étudiée : $f(x) = \sin x$. Sa linéarisation en 0 est $L(x) = P_1(x) = x$. Ici $n = 1$ et $a = 0$. Le théorème nous demande de trouver une borne $M$ à $|f^{(2)}(t)| = |-\sin t|$. Clairement, on peut prendre $M = 1$. Le théorème conclut :

$$|E_1(x)| \leq 1 \frac{|x-0|^2}{2!} = \frac{|x|^2}{2},$$

comme nous avions obtenu.

De même, l'approximation quadratique de $f(x) = \sin x$ autour de 0 est encore $P_2(x) = x$. Comme $|f'''(t)| = |-\cos t| \leq 1$, l'erreur d'approximation $E_2(x)$ vérifie $|E_2(x)| \leq 1 \frac{|x-0|^3}{3!} = \frac{|x|^3}{6}$. On pourra écrire

$$\sin x = x \pm \frac{|x|^3}{6}.$$

L'approximation est donc meilleure que ce que nous avions obtenu en ne considérant que la linéarisation, du moins quand $x$ est près de 0. Ainsi

$$\sin(0,1) = 0,1 \pm \frac{(0,1)^3}{6} = 0,10000 \pm 0,00017.$$

(La calculatrice (**en radians !**) donne $\sin(0,1) = 0,0998334\ldots$)

---

**Exemple 2.3** Comme on l'a vu à l'exemple 1.21, l'approximation quadratique de $f(x) = \ln x$ autour de 1 est

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}\,.$$

Supposons qu'on veuille calculer $\ln(1,2)$ avec une précision contrôlée. Puisque $x = 1,2 \geq 1$, il suffit de borner $|f'''(t)| = |2/t^3|$ pour $1 \leq t \leq x$. Or $|f'''(t)| = |2/t^3| \leq 2$ pour $t \geq 1$, ce qui permet d'écrire :

$$|E_2(x)| \leq 2\,\frac{|x-1|^3}{3\,!} = \frac{|x-1|^3}{3}\,.$$

Ainsi,

$$\ln(1,2) = (1,2-1) - \frac{(1,2-1)^2}{2} \pm \frac{|1,2-1|^3}{3} = 0,180 \pm 0,003\,.$$

(On a un peu arrondi supérieurement l'imprécision.) La calculatrice donne $\ln(1,2) \approx 0,1823\ldots$. Notez qu'on n'a pas eu besoin de ce dernier résultat pour estimer la précision.

---

**Remarque.** L'estimé de l'erreur d'approximation ressemble beaucoup à celui qu'on obtiendrait si la série était alternée. En effet, estimer une fonction $y = f(x)$ par son polynôme de Taylor de degré $n$ centré en $a$, revient à négliger tous les termes de la série de Taylor correspondante à partir du degré $n+1$. Le premier d'entre eux est (en grandeur) :

$$|f^{(n+1)}(a)|\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)\,!}\,.$$

Si la série est alternée (pour la valeur $x$ choisie), les termes négligés se cancellent partiellement, ce qui contribue à réduire l'erreur. Dans ce cas, le premier terme négligé constitue directement une borne de l'erreur d'approximation.

Cependant, si la série n'est pas alternée, les termes négligés ne se cancellent pas ; au contraire. C'est presque miraculeux qu'il suffise de remplacer $|f^{(n+1)}(a)|$ par n'importe quel $M \geq |f^{(n+1)}(t)|$ (valide pour tout $t$ entre $a$ et $x$) pour trouver malgré tout une borne pour l'erreur d'approximation.

### 2.1.2 Convergence des séries de Taylor

Nous avons remarqué que la qualité de l'approximation de $f(x)$ par son polynôme de Taylor $P_n(x)$ (autour de $a$) devrait augmenter avec $n$, *du moins, si $x$ est suffisamment près de $a$*. Ce qui signifie que $|E_n(x)|$ devrait normalement décroître quand $n$ augmente. Il se peut même que $E_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. Dans ce cas, on aura

$$f(x) - T(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - P_n(x)) = \lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0\,,$$

ce qui prouve le théorème suivant.

**Théorème 2.1.2** *Soit $f$ une fonction dérivable une infinité de fois en $x = a$ et $T(x)$ la série de Taylor centrée en $a$, associé à cette fonction. Si, pour tout $x$ dans un certain intervalle $I$, la série $T(x)$ converge et $E_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $f(x) = T(x)$ pour $x \in I$.*

Il existe cependant des fonctions $f$ pour lesquelles $E_n(x) \not\to 0$ quand $n \to \infty$ (même en cas de convergence). Évidemment, dans ce cas, la série de Taylor $T(x)$ correspondante ne converge pas vers $f(x)$. L'exemple classique est (pour votre intérêt personnel) :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

dont la série est $T(x) = 0 \neq f(x)$.

### 2.1.3 Quelques exemples

**Exemple 2.4 (Série du cosinus)** La série de Maclaurin de la fonction $f(x) = \cos x$ est

$$T(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2\,k}}{(2\,k)\,!}$$

(voir l'exemple 1.23 et l'exercice 1.19).

- **Convergence de la série vers la fonction.** Estimons l'erreur d'approximation commise en remplaçant $\cos x$ par $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x)$. Comme toutes les dérivées sont $\pm\cos x$ ou $\pm\sin x$, il est clair que $|f^{(2n+2)}(t)| \leq 1$ pour tout $t$. On peut donc prendre $M = 1$, d'où

  $$|E_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)\,!}\,.$$

  On pourrait montrer que cette dernière expression tend vers 0 quand $n \to \infty$ quelque soit la valeur de $x$. Donc

  $$\lim_{n\to\infty} E_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (\cos x - P_{2n+1}(x)) = 0\,,$$

ce qui démontre l'égalité

$$\cos x = T(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

- **Marge d'erreur fixe, degré au choix.** Si nous voulions maintenant estimer $\cos 1$ à $10^{-6}$ près, quel polynôme de Maclaurin devrions-nous prendre ? En prenant $P_{2n}(1) = P_{2n+1}(1)$, l'erreur ne dépasserait pas $\frac{1}{(2n+2)!}$. Il suffit donc de prendre $n$ tel que $\frac{1}{(2n+2)!} \leq 10^{-6}$. Ceci se produit dès que $n = 4$. À cette précision, on aurait donc

$$\cos 1 \approx P_8(1) = P_9(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} \approx 0,540303.$$

- **Marge d'erreur fixe, sur tout un intervalle.** Finalement, examinons le cas où on veut estimer $\cos x$ par un polynôme de Maclaurin avec une précision d'au moins $0,002$ pour tout $x \in [0,1]$. Si nous utilisons $P_{2n}(1) = P_{2n+1}(1)$, l'erreur vérifiera

$$|E_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \frac{1}{(2n+2)!} \leq 0,002.$$

Il faut donc que $(2n+2)! \geq 500$, ce qui se vérifie dès que $n = 2$. À cette précision,

$$\cos x = P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \text{pour} \quad x \in [0,1].$$

---

**Exemple 2.5 (Série de l'exponentielle)** La série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ est

$$T(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(voir l'exemple 1.22 et l'exercice 1.16).

- **Estimation ponctuelle de l'erreur.** Nous avions trouvé une approximation de $e^x$ en $x = -0,3$ à l'aide du polynôme de Maclaurin de degré 3 correspondant. On avait

$$\begin{aligned} P_3(-0,3) &= 1 + \frac{(-0,3)}{1!} + \frac{(-0,3)^2}{2!} + \frac{(-0,3)^3}{3!} \\ &= 0,74050\ldots \end{aligned}$$

Nous allons estimer la qualité de ce résultat. Comme $0 < f^{(4)}(t) = e^t \leq 1$ pour $-0,3 \leq t \leq 0$ (pour $t \leq 0$ en fait), on peut prendre $M = 1$. L'erreur vérifiera :

$$|E_3(-0,3)| \leq 1 \, \frac{|-0,3-0|^4}{4\,!} = 0,00034\,.$$

On a donc

$$e^{-0,3} = 0,74050 \pm 0,00034\,.$$

La calculatrice fournit $e^{-0,3} \approx 0,74082$.

- **Marge d'erreur fixe, degré au choix.** Plus généralement, l'erreur $E_n(x)$ commise en remplaçant $e^x$ par $P_n(x)$ vérifie :

$$|E_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,!} \quad \text{pour} \quad x \leq 0\,,$$

(car $|f^{(n+1)}(t)| = |e^t| \leq 1$ pour $x \leq t \leq 0$ (si $x \leq 0$)). Supposons qu'on ait besoin de trouver $e^{-0,3}$ à $0,000025$ près, quel polynôme de Maclaurin faudrait-il prendre ?

On veut que

$$|E_n(-0,3)| \leq \frac{(0,3)^{n+1}}{(n+1)\,!} \leq 0,000025\,.$$

Par calculs successifs, on trouve $n \geq 4$. On a donc :

$$e^{-0,3} = P_4(-0,3) \pm \frac{(0,3)^5}{5\,!} = 0,740838 \pm 0,000021\,.$$

Comparez avec le résultat de la calculatrice : $e^{-0,3} \approx 0,7408182\ldots$

- **Estimation ponctuelle de l'erreur.** Et si $x \geq 0$ ? L'erreur $E_n(x)$ commise en remplaçant $e^x$ par $P_n(x)$ vérifie :

$$|E_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}\,e^x}{(n+1)\,!} \quad \text{pour} \quad x \geq 0\,,$$

En effet, $|f^{(n+1)}(t)| = |e^t|$ est croissante. Elle prend donc sa valeur maximale à la borne supérieure de l'intervalle $[0,x]$ parcouru par $t$. On a alors $|f^{(n+1)}(t)| = |e^t| \leq e^x$ (ne dépend pas de $n$, ni de $t$).

Supposons qu'on ait besoin d'estimer $e^{0,3}$ par $P_2(0,3) = 1,345$. L'erreur vérifie

$$|E_2(0,3)| \leq \frac{|0,3|^3\,e^{0,3}}{3\,!} < \frac{|0,3|^3\,1,5}{3\,!} < 0,007\,.$$

Notez l'approximation grossière $e^{0,3} < 1,5$.

- **Convergence vers la fonction.** Toutes les dérivées de $e^t$ sont $e^t$, une fonction croissante. Ainsi, pour $t$ entre 0 et $x$, on a $e^t \leq \max\{1, e^x\}$ (il se peut que $x < 0$). On peut donc prendre $M = \max\{1, e^x\}$. L'erreur d'approximation sera :

$$e^x - P_n(x) = \frac{M\,|x|^{n+1}}{(n+1)\,!}\,.$$

On peut montrer (par exemple en utilisant les formules 1.2 ou 1.3 comme approximation de $n\,!$) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\,|x|^{n+1}}{(n+1)\,!} = 0\,.$$

On a donc

$$e^x = T(x) = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots$$

---

**Exemple 2.6 (Série du logarithme, suite)** La série de Taylor autour de 1 de la fonction $f(x) = \ln x$, calculée à l'exemple 1.24, est

$$T(x) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

Cette série converge sur l'intervalle $]0, 2]$. Nous allons étudier cette série sur l'intervalle $[1, 2]$, afin d'éviter certaines complications.

- **Borne pour l'erreur.** Cherchons à estimer l'erreur d'approximation $E_n(x)$ produite en remplaçant $f(x) = \ln x$ par $P_n(x)$, pour $1 \leq x$. Si $t \in [1, 2]$, la valeur absolue de la dérivée

$$|f^{(n+1)}(t)| = n\,!\,|t|^{-(n+1)}$$

est décroissante. Elle ne dépasse donc pas sa valeur en $t = 1$, ce qui permet de choisir $M = n\,!$. On trouve donc :

$$|E_n(x)| \leq M\,\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)\,!} = \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour} \quad x \geq 1\,.$$

- **Estimation ponctuelle de l'erreur.** Nous avions estimé $\ln x$ en $x = 1,3$ en utilisant le polynôme de Taylor de degré 3 correspondant. On avait

$$\begin{aligned} P_3(1,3) &= (1,3\,-\,1) - \frac{(1,3\,-\,1)^2}{2} + \frac{(1,3\,-\,1)^3}{3} \\ &= 0,264000\,. \end{aligned}$$

Quelle confiance attacher à ce résultat ? L'erreur d'approximation ne dépasse pas

$$\frac{|1,3-1|^{3+1}}{3+1} = \frac{|0,3|^4}{4} = 0,002025\,.$$

On peut écrire $\ln(1,3) = 0,2640 \pm 0,0021$ (à 4 chiffres significatifs), soit

$$0,2619 \leq \ln 1,3 \leq 0,2661\,.$$

La calculatrice fournit $\ln 1,3 \approx 0,26236\ldots$.

- **Marge d'erreur fixe, degré au choix.** Supposons qu'on veuille estimer $\ln x$ en $x = 1,3$ par un polynôme de Taylor de degré $n$ de telle sorte que l'erreur d'approximation ne dépasse pas $0,0005$. Quel degré faudrait-il choisir?

  Puisque $|E_n(1,3)| \leq |1,3 - 1|^{n+1}/(n+1) = (0,3)^{n+1}/(n+1)$, il suffit de prendre $n$ tel que

  $$\frac{(0,3)^{n+1}}{n+1} \leq 0,0005\,.$$

  Ici, il faut tâtonner un peu. Nous avons vu que $n = 3$ ne suffit pas (l'erreur pourrait atteindre $0,002025$). Avec $n = 4$, on obtient

  $$\frac{(0,3)^{4+1}}{4+1} = 0,000486\ldots \leq 0,0005\,.$$

  On peut donc remplacer $\ln(1,3)$ par $P_4(1,3) = 0,2620\ldots$ pour avoir la précision voulue.

- **Erreur et convergence.** Revenons maintenant à la série. Celle-ci converge pour $x \in \,]0,2]$. Mais nous avons une estimation de l'erreur seulement pour $x \geq 1$. L'étude qui suit ne s'applique que si $x \in [1,2]$.

  Dans ce cas,

  $$|E_n(x)| \leq \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{|2-1|^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$

  Clairement, $E_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. Nous avons donc prouvé que, pour $1 \leq x \leq 2$

  $$\ln x = T(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

**Remarque.** En fait, une analyse plus raffinée montrerait que le résultat tient aussi pour $0 < x \leq 1$. Ce qu'il faudrait modifier est la borne $M$ pour la dérivée $n+1$ième. En effet, si $0 < x_0 \leq 1$, cette dérivée $|f^{(n+1)}(t)| = n\,!\,|t|^{-(n+1)}$ est toujours décroissante pour $t \in [x_0, 1]$. On a donc

$$|f^{(n+1)}(t)| = n\,!\,|t|^{-(n+1)} \leq n\,!\,|x_0|^{-(n+1)} = M$$

(ne dépend pas de $n$). Le reste de la démarche est similaire.

---

**Exemple 2.7** * On peut aussi construire nos séries (et l'estimation de l'erreur associée) à partir de séries plus simples et connues. Par exemple, faisons le calcul pour l'intégrale du début du chapitre. Il s'agit d'évaluer $F(1/2)$, où

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt\,.$$

- **Par linéarisation.** Calculons, pour commencer, la linéarisation de $F$ autour de 0 pour $0 \le x \le 1/2$. On a $F(0) = 0$. La dérivée est $F'(x) = e^{x^2}$, d'où $F'(0) = 1$. L'approximation linéaire est donc $P_1(x) = x$.

  Examinons la qualité de l'approximation. On a $F''(x) = 2x\, e^{x^2}$ qu'on cherche à borner sur $[0, 1/2]$. Comme cette dernière est croissante (sa dérivée, $F'''(x) = 2\,(1 + 2\,x^2)\, e^{x^2}$, est clairement positive), le maximum de $F''$ sera $F''(1/2) = e^{1/4} \le 1,3$. On peut donc prendre $M = 1,3$. L'estimé de l'erreur est

$$|E_1(x)| \le 1,3\, \frac{|x|^2}{2}, \qquad \text{pour} \quad 0 \le x \le 1/2\,.$$

  En particulier, pour $x = 1/2$ :

$$F(1/2) = \int_0^{1/2} e^{t^2}\, dt = 0,5 \pm 0,1625\,.$$

- **Calcul de la série de $e^{x^2}$.** On peut faire beaucoup mieux. Pour améliorer la qualité de l'approximation, il faudrait calculer des termes plus éloignés dans la série de $F(x)$. Ce qui revient à calculer plusieurs dérivées de $e^{x^2}$. On voit rapidement que celles-ci deviennent de plus en plus compliquées.

  Procédons de façon plus astucieuse. Le développement de $e^x$ autour de $x = 0$ est

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} + E_n(x)\,,$$

  où

$$|E_n(x)| \le M\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

  pour une certaine constante $M$. Or on cherche ultimement à estimer l'intégrale de $e^{x^2}$ pour $0 \le x \le 1/2$ (l'intervalle d'intégration), donc pour $0 \le x^2 \le 1/4$. Ceci pourra se déduire de l'approximation de $e^x$ pour $0 \le x \le 1/4$.

Donc $M$ doit vérifier $M \geq |(e^t)^{(n+1)}| = |e^t|$ pour $0 \leq t \leq 1/4$. Comme $e^t$ est croissante, on aura (grossièrement) $|e^t| \leq e^{1/4} < 2$ dans cet intervalle. Ceci donne l'estimé

$$|E_n(x)| \leq \frac{2\,x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,, \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1/4\,.$$

On a donc

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k\,!} + E_n(x^2)\,,$$

pour $0 \leq x^2 \leq 1/4$ (donc pour $-1/2 \leq x \leq 1/2$) avec

$$|E_n(x^2)| \leq \frac{2\,x^{2(n+1)}}{(n+1)\,!}\,.$$

- **Calcul de la série de l'intégrale.** Maintenant intégrons de 0 à 1/2.

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} e^{x^2}\,dx &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{1/2} \frac{x^{2k}}{k\,!}\,dx \pm \int_0^{1/2} \frac{2\,x^{2(n+1)}}{(n+1)\,!}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left.\frac{x^{2k+1}}{k\,!\,(2k+1)}\right|_0^{1/2} \pm \left.\frac{2\,x^{2n+3}}{(n+1)\,!\,(2n+3)}\right|_0^{1/2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!\,(2k+1)\,2^{2k+1}} \pm \frac{1}{(n+1)\,!\,(2n+3)\,2^{2n+2}}\,.
\end{aligned}$$

L'approximation avec les deux premiers termes ($n = 1$) est donc

$$\int_0^{1/2} e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} \pm \frac{1}{2\,! \times 5 \times 16} \approx 0,542 \pm 0,007$$

(l'arrondis se réflète aussi dans l'estimé de l'erreur). Pas mal pour une approximation n'utilisant que deux termes !

Remarquez que la fonction `fnInt` de votre calculatrice (qui permet le calcul approximatif d'intégrales définies) donne la valeur

$$\int_0^{1/2} e^{x^2}\,dx \approx 0.5449871042\ldots$$

(tapez `fnInt(e^(x^2),x,0,0.5)`, dans le menu `math`). Mais on n'a aucune idée quels sont les chiffres vraiment significatifs et lesquels ne forment qu'une suite au hasard.

## Exercices

**2.1** a. Utilisez une approximation linéaire autour de $x = 0$ pour estimer (avec la marge d'erreur cette fois) $\arcsin(0,4)$.

b. Même question si on utilise l'approximation linéaire autour de $x = 1/2$.

**2.2** a. On a vu que $\sin x = x \pm |x|^3/6$ (approximation quadratique autour de $x = 0$). Pour quelles valeurs de $x$ cette approximation donne-t-elle une erreur ne dépassant pas $10^{-3}$ ?

b. Dans quel intervalle pourrait-on utiliser l'approximation quadratique de $\cos x$ autour de $x = 0$ pour s'assurer que l'erreur ne dépasse pas $2 \times 10^{-4}$ ?

**2.3** Supposons que votre calculatrice ne puisse calculer $a^b$ que pour des exposants entiers (ou 1/2). Utilisez une approximation quadratique de $f(x) = (1+x)^{\sqrt{11}}$ autour de 0 pour estimer $(1,1)^{\sqrt{11}}$. Estimez aussi une borne pour l'erreur d'approximation. (Remarque : on sait que $3 < \sqrt{11} < 4$ car $9 < 11 < 16$. Vous pouvez donc borner $0,1^{\sqrt{11}}$ qui apparaît dans le terme d'erreur.)

**2.4** (*) Utilisez une approximation linéaire de $\sqrt{1+x}$ autour de 0 pour estimer $\int_0^1 \sqrt{1+x^5}\,dx$. Estimez aussi l'erreur d'approximation.

**2.5** Cet exercice permet de revoir ce qui se passe dans le théorème de Taylor.

a. Soit $x \geq 0$ (fixé). Soit $t \in ]0, x[$. Pourquoi peut-on affirmer que $0 \leq e^t \leq e^x$ ?

b. Intégrer l'inégalité précédente de 0 à $t$. Un peu d'algèbre mène à $0 \leq e^t - 1 \leq e^x\, t$.

c. Intégrer de nouveau entre 0 et $t$ pour obtenir $0 \leq e^t - 1 - t \leq e^x\, t^2/2$.

d. En continuant ainsi, on obtient successivement

$0 \leq e^t - 1 - t - t^2/2 \leq e^x\, t^3/3\,!$,

$0 \leq e^t - 1 - t - t^2/2 - t^3/3\,! \leq e^x\, t^4/4\,!$,

$\vdots$

e. Sachant que $\lim_{n\to\infty} t^n/n\,! = 0$, en déduire la série pour $e^t$ (quand $t \geq 0$).

**2.6** a. On veut estimer $\sqrt{e} = e^{1/2}$ en utilisant le développement de $e^x$ autour de 0 de degré 3. Estimez l'erreur prévue. (N.B. Bornez, si nécessaire, $e^{1/2} \approx 1,649$ par 2.)

b. Question similaire pour $\ln 2$ en utilisant le polynôme de Maclaurin de degré 3 de la fonction $\ln(1+x)$.

**2.7** Pour estimer les nombres suivants à $10^{-4}$ près, combien faut-il utiliser de termes ?

a. $\pi/4 = \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)$.

b. $\sqrt{e} = e^{1/2}$ en utilisant le développement de $e^x$ autour de 0. (Vous pouvez prendre pour acquis que $e^{1/2} < 2$.)

c. $\ln(1,1)$ en utilisant le développement de $\ln(1+x)$ autour de 0.

**2.8** Pour quelles valeurs de $x$ (si $x$ est assez près de 0) les approximations $\sin x \approx x$ et $\cos x \approx 1 - x^2/2$ sont-elles valides, si une précision de $10^{-3}$ suffit ?

**2.9** La fonction de Bessel d'ordre 1, notée $J_1(x)$ est *définie* par la série :

$$J_1(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{2^{2k+1} k\,!\,(k+1)\,!}\,.$$

a. Montrez qu'il s'agit d'une série alternée pour toute valeur de $x$.

b. Considérons l'approximation $J_1(x) \approx x/2 - x^3/16$ constituée des deux premiers termes de la série.

(i) Estimez $J_1(1)$ et l'erreur associée si on utilise cette approximation.

(ii) Pour quelles valeurs de $x$ est-on assuré que l'erreur d'approximation est inférieure à 0,001 ?

c. Estimez $J_1(1)$ à $10^{-4}$ près.

**2.10** Considérons la fonction $f(x) = \sin x$.

a. Trouvez sa série de Maclaurin.

b. Montrez que l'erreur commise en remplaçant $\sin x$ par $P_{2n-1}(x)$ (le polynôme de Maclaurin de degré $2n-1$ correspondant) est toujours inférieure à $|x|^{2n+1}/(2n+1)\,!$.

c. Montrez que $\lim_{n\to\infty} P_{2n-1}(x) = \sin x$.

**2.11** Les dérivées d'une certaine fonction $f$ vérifient

$$| f^{(n)}(x) | \leq \frac{(n-2)!}{(1+x^2)^n}, \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

Si on remplace $f(x)$ par $P_n(x)$, son polynôme de Maclaurin de degré $n$,

a. Trouvez l'erreur commise, si $n = 5$ (en fonction de $x$).

b. Dans quel intervalle (pour $x$) est-on certain que l'erreur ne dépasse pas $10^{-3}$ ?

c. Trouvez l'erreur commise en fonction de $x$ et $n$.

d. Montrez que pour $|x| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. (Sugg.: $|f(x) - P_n(x)| = |E_n(x)|$.)

e. On aimerait estimer $f(2)$ en utilisant $P_n(2)$. Quelle(s) valeur(s) de $n \geq 2$ minimise(nt) la borne d'erreur ?

## 2.2 Autres applications des séries de Taylor

**Exemple 2.8 Calcul de limites :**

La règle de L'Hospital permet de résoudre facilement plusieurs évaluations de limites. Mais le développement en séries est encore plus efficace. C'est même la méthode programmée dans MAPLE pour ce type de problèmes. Il s'agit de remplacer les fonctions par leurs développements. Par exemple, pour évaluer

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{2\,\ln x\, + (x-3)\,(x-1)}{(x-1)^3}\,,$$

on développerait chacun des termes en puissances de $x-1$ (pourquoi autour de 1 ?), soit $\ln x = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 + \cdots$ et $(x-3)\,(x-1) = -2\,(x-1) + (x-1)^2$. Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 1} \frac{2\,\left((x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 + \cdots\right)\, - 2\,(x-1) + (x-1)^2}{(x-1)^3} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2\,(x-1)^3/3 + \cdots}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

L'exemple suivant est encore plus probant pour évaluer la performance des deux méthodes. Essayez d'appliquer l'Hospital à

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}\ \ldots$$

pour voir… Convaincu ? Voyez comme les séries de Taylor permettent de résoudre rapidement le problème.

Comme $\sin x = x - x^3/3\,! + x^5/5\,! + \cdots$, on a

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= (\sin x) \times (\sin x) \\ &= (x - x^3/3\,! + x^5/5\,! + \cdots)\,(x - x^3/3\,! + x^5/5\,! + \cdots) \end{aligned}$$

Puis, en distribuant chaque terme du premier facteur :

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= x\,(x - x^3/3\,! + x^5/5\,! + \cdots) - x^3/3\,!\,(x - x^3/3\,! + x^5/5\,! + \cdots) + \cdots \\ &= (x^2 - x^4/3\,! + \cdots) - (x^4/3\,! + \cdots) + \cdots \\ &= x^2 - x^4/3 + \text{ termes en } x^6,\, x^8,\, \ldots \end{aligned}$$

On peut multiplier ce dernier résultat par $x^2$ :

$$x^2 \sin^2 x = x^4 - x^6/3 + \text{ termes en } x^8,\, x^{10},\, \ldots$$

Ceci conduit à :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - x^4/3 + \cdots) - x^2}{x^4 - x^6/3 + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/3 + \cdots}{x^4 + \cdots} = -1/3\,.$$

---

**Exemple 2.9 Calcul d'intégrales :**

La fonction $\sin x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle possède donc une primitive. Malheureusement, celle-ci ne s'exprime pas en terme de fonctions "élémentaires" (en nombre fini). Calculer, à $2 \times 10^{-5}$ près, l'intégrale (dite de FRESNEL) :

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx\,.$$

**Solution.** Comme

$$\sin x = x - x^3/3\,! + x^5/5\,! - x^7/7\,! \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)\,!}\,,$$

on a

$$\sin x^2 = x^2 - x^6/3\,! + x^{10}/5\,! - x^{14}/7\,! \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{4i+2}}{(2i+1)\,!}\,.$$

L'intégration produit :

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \int_0^1 \frac{x^{4i+2}}{(2i+1)\,!}\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)\,!\,(4i+3)}\,.$$

On peut estimer l'intégrale en tronquant la série :

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)\,!\,(4i+3)}\,,$$

avec une erreur (série alternée) d'au plus :

$$\frac{1}{(2(n+1)+1)\,!\,(4(n+1)+3)} = \frac{1}{(2n+3)\,!\,(4n+7)} \le 2 \times 10^{-5}\,.$$

Il suffit donc que $(2n+3)\,!(4n+7) \ge 50\,000$. Ceci est vrai à partir de $n = 2$. Ainsi,

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \frac{1}{1\,! \cdot 3} - \frac{1}{3\,! \cdot 7} + \frac{1}{5\,! \cdot 11} \pm 2 \times 10^{-5} = 0,3102814\ldots \pm 2 \times 10^{-5}\,.$$

---

**Exemple 2.10 Changement d'origine d'un polynôme :**

Exprimer $P(x) = 8x^3 + 4x$ en puissances de $x - 1$.

**Solution.** On pourrait poser $u = x - 1$ ($x = u + 1$), développer $P(x) = 8(u+1)^3 + 4(u+1)$, puis retourner à la variable $x$. Peu intéressant.

On peut aussi calculer le polynôme de Taylor de degré 3 associé (autour de $x = 1$). Calcul des dérivées :

$$P(x) = 8x^3 + 4x,\ P'(x) = 24x^2 + 4,\ P''(x) = 48x,\ P'''(x) = 48\,,$$

(les autres sont nulles). Évaluation en $x = 1$ :

$$P(1) = 12,\ P'(1) = 28,\ P''(1) = 48,\ P'''(1) = 48\,.$$

Construction de la série de Taylor :

$$\begin{aligned} P(x) &= 12 + \frac{28}{1\,!}(x-1) + \frac{48}{2\,!}(x-1)^2 + \frac{48}{3\,!}(x-1)^3 \\ &= 12 + 28(x-1) + 24(x-1)^2 + 8(x-1)^3\,. \end{aligned}$$

---

**Exemple 2.11 Estimation de fonctions implicites :**

On aimerait connaître la fonction $y = f(x)$ définie implicitement par : $y = xe^y$. Ceci n'est pas possible en terme de fonctions élémentaires. On se contentera ici d'une approximation de Maclaurin de degré 3.

**Solution.** Posons $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Si $x = 0$, l'équation $y = xe^y$ donne $y|_{x=0} = a_0 = 0$. Donc $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. On pourrait calculer les dérivées de $y$, mais c'est un peu pénible. Mieux, nous allons développer le membre de droite de l'équation :

$$\begin{aligned} e^y = 1 + y + y^2/2\,! + \cdots &= 1 + (a_1x + a_2x^2 + \cdots) + (a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2/2 \\ &\qquad + (a_1x + a_2x^2 + \cdots)^3/6 \\ &= 1 + a_1x + (a_2 + a_1^2/2)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

L'équation $y = xe^y$ se traduit alors par :

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = 1x + a_1x^2 + (a_2 + a_1^2/2)x^3 + \cdots\,.$$

En identifiant les coefficients de mêmes puissances de $x$, on a la suite d'équations

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1, \quad a_3 = a_2 + a_1^2/2\,,$$

qui donnent

$$a_2 = a_1 = 1, \quad a_3 = 3/2\,.$$

L'approximation de degré 3 est donc : $y \approx x + x^2 + 3x^3/2$.

**Exemple 2.12 Solutions d'équations différentielles :**

Résoudre $y' = x^2 + y^2$ avec $y_{x=0} = 1$. Impossible en terme de fonctions élémentaires. On se contente d'une approximation de Maclaurin de degré 3 (par exemple).

**Solution.** Dériver l'équation $y' = x^2+y^2$, pour calculer $y''$ et $y'''$, on trouve :

$$y'' = 2x + 2yy' \qquad \text{et} \qquad y^{(3)} = 2 + 2yy'' + 2y'^2\,.$$

En $x = 0$, les dérivées prennent les valeurs :

$$\begin{aligned} y'_{x=0} &= 0^2 + y^2_{x=0} = 1, \\ y''_{x=0} &= 2 \cdot 0 + 2y_{x=0}y'_{x=0} = 2, \\ y^{(3)}_{x=0} &= 2 + 2y_{x=0}y''_{x=0} + 2y'^2_{x=0} = 8\,. \end{aligned}$$

La série de Maclaurin produite est :

$$y = 1 + x/1\,! + 2\,x^2/2\,! + 8\,1404x^3/3\,! + \cdots = 1 + x + x^2 + 4x^3/3 + \cdots$$

# Exercices

**2.12** Évaluez les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{\sin x^3}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\tan^3 x}$ c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\,\ln(1+x) - 2\,\sin x + x^2}{x^3}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{-1/x^2}-1\right)$ e. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{1-x}$ f. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}$,

g. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^2 - x\sin x}$.

**2.13** À l'aide de séries de Maclaurin appropriées, estimez :

a. $\int_0^{1/2} \cos(\sqrt{x})\,dx$. Évaluez l'erreur si on prend 3 termes (non-nuls) de la série de $\cos y$.

b. $\int_0^{0,3} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx$, à $10^{-4}$ près. Utiliser la série de $e^{-x}$.

c. $\int_0^{1/2} \cos(\sqrt{x})\,dx$, à $10^{-4}$ près. Utiliser la série de $\cos y$.

d. $\int_0^{1/10} e^{-x^2}\,dx$, à $10^{-4}$ près. Utiliser la série de $e^y$.

**2.14** Exprimez le polynôme $(1+x)^3$

a. en puissances de $x-1$. b. en puissances de $x+2$.

**2.15** Approximations quadratiques (autour de $x=0$) de $y=f(x)$ si :

a. $x\sin y = y + \sin x$. b. $y' = xy + 1$ avec $y(0) = 1$.

## 2.3 Séries de Taylor à plusieurs variables

On peut souvent développer des fonctions $f(x,y)$, $g(x,y,z)$,… à plusieurs variables en les ramenant au cas à une variable et en utilisant les opérations usuelles. Si on voulait calculer un développement de $f(x,y) = e^{-2y}\sin(3x)$ jusqu'au degré 3, par exemple, on pourrait utiliser les séries de $e^x$ et de $\sin x$ et les multiplier en négligeant les termes de degré supérieurs à 3, comme suit

$$\begin{aligned}
e^{-2y}\sin(3x) &= \overbrace{\left(1-\frac{(2y)}{1\,!}+\frac{(2y)^2}{2\,!}-\frac{(2y)^3}{3\,!}+\cdots\right)}^{e^{-2y}}\overbrace{\left(3x-\frac{(3x)^3}{3\,!}+\cdots\right)}^{\sin(3x)} \\
&= 1\times\left(3x-\frac{(3x)^3}{3\,!}+\cdots\right)-\frac{(2y)}{1\,!}\times 3x+\frac{(2y)^2}{2\,!}\times 3x+\cdots \\
&= 3\,x-\frac{9\,x^3}{2}-6\,xy+6\,xy^2+\cdots
\end{aligned}$$

De même, en utilisant $\sin x = x - x^3/3\,! + \cdots$, on aurait au degré 3

$$\begin{aligned}
\sin(x^2-2\,y) &= (x^2-2\,y)-(x^2-2\,y)^3/3\,!+\cdots \\
&= (x^2-2\,y)-(x^6-6\,x^4y+24\,x^2y^2-8\,y^3)/3\,!+\cdots \\
&= -2y+x^2+4\,y^3/3+\cdots
\end{aligned}$$

On pourrait se débrouiller ainsi dans plusieurs situations. Cependant, il serait commode d'avoir une formule pour trouver directement les coefficients des puissances de $x$ et de $y$, et ce, pour plusieurs raisons :

a. les calculs sont peut-être plus simples,

b. on aurait une expression théorique qui permet de trouver des relations entre les coefficients, ou qui permet de comprendre les séries à plusieurs variables,

c. certaines fonctions à 2 variables (ou plus) ne permettent pas le genre de calculs qui sont illustrés plus haut.

Par exemple, si on utilisait $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 + \cdots$ pour calculer le développement de $f(x,y) = \arctan(1+x-y)$, on aurait

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (1+x-y)-(1+x-y)^3/3+(1+x-y)^5/5+\cdots \\
&= (1+x-y)-(1+3x+\cdots)/3+(1+5x+\cdots)/5+\cdots
\end{aligned}$$

et il est loin d'être évident de trouver le coefficient de $x$ à partir de cette expression…

### 2.3.1 Linéarisation et erreur d'approximation

On connaît déjà l'approximation de degré 1 d'une fonction à plusieurs variables : c'est sa linéarisation (plan tangent). Dans le cas de $z = f(x, y)$, sa **linéarisation en** $(a, b)$ est (comme on le sait déjà) :

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b)\,.$$

De façon similaire au cas à une variable, on voit facilement que la fonction et son approximation ont une image et des dérivées qui concordent au point $(a, b)$ :

$$P_1(a, b) = f(a, b)\,, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_1}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,.$$

On sait aussi que si les dérivées partielles de $f$ sont continues autour et en $(a, b)$, la fonction est différentiable en $(a, b)$ et l'approximation $f(x, y) \approx P_1(x, y)$ est relativement “bonne”. Plus précisément,

$$E_1(x, y) = f(x, y) - P_1(x, y) = \epsilon_1 \times (x - a) + \epsilon_2 \times (y - b)\,,$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ quand $(x, y) \to (a, b)$.

Cette expression nous informe qualitativement sur le comportement général de l'erreur d'approximation pour $(x, y) \to (a, b)$, mais ne dit pas grand chose, quantitavivement, sur celle-ci. On peut remédier à la situation.

**Théorème 2.3.1** *Soit $R$ un rectangle ouvert (du plan $XY$) contenant $(a, b)$ et $(x, y)$. Soit $f$ est une fonction (à deux variables) continue et dont les dérivées premières et secondes sont continues sur $R$. Soit $P_1$ le polynôme de Taylor de degré 1 autour de $(a, b)$ associé à $f$. Alors l'erreur*

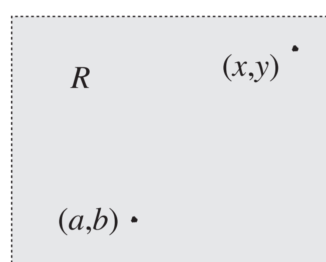
$$E_1(x, y) = f(x, y) - P_1(x, y)$$

*commise en estimant $f(x, y)$ par $P_1(x, y)$ vérifie*

$$|E_1(x, y)| \leq \frac{B}{2}\,(|x - a| + |y - b|)^2\,,$$

*où $B$ est un nombre positif choisi de sorte que :*

$$B \geq |f''_{xx}|, |f''_{xy}|, |f''_{yy}| \quad \textit{évaluées sur } R\,.$$




**Remarque.** Il existe d'autres estimations, plus fines ou adaptées à certaines situations, de l'erreur d'approximation. Celle-ci est probablement la plus simple. On la démontre à la section 2.5.

**Exemple 2.13** Soit $f(x,y) = \arctan(1+x-y)$.

- **Linéarisation.** Si on voulait la linéarisation de $f$ en $(0,0)$, on calculerait

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+(1+x-y)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+(1+x-y)^2}\,.$$

En évaluant en $(0,0)$, on aurait

$$f(0,0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{1}{2}\,.$$

On a donc

$$P_1(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,(x-0) - \frac{1}{2}\,(y-0) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\,.$$

- **Erreur d'approximation.** Pour estimer l'erreur, il faut trouver les dérivées secondes :

$$f''_{xx} = -f''_{xy} = f''_{yy} = -\frac{2\,(1+x-y)}{(1+(1+x-y)^2)^2}\,,$$

qu'il faut borner (pour trouver $B$). Ici, on pourra borner sur $\mathbb{R}^2$ au complet. On peut réduire les calculs en remarquant que ces dérivées ne dépendent que de $s = 1+x-y$. On a

$$|f''_{xx}| = |f''_{xy}| = |f''_{yy}| = \frac{2\,|1+x-y|}{(1+(1+x-y)^2)^2} = \frac{2\,|s|}{(1+s^2)^2}\,.$$

Il suffit donc de trouver le maximum de

$$b(s) = \frac{2\,s}{(1+s^2)^2} \quad \text{pour} \quad s \geq 0\,.$$

Or la dérivée de cette dernière est $2\,(1-3s^2)/(1+s^2)^3$, donnant la valeur critique $s = 1/\sqrt{3}$ (en plus de $s = 0$ qui ne peut donner un maximum). La valeur maximale de la fonction est donc $b(1/\sqrt{3}) = 3\,\sqrt{3}/8$. On a ainsi :

$$|f''_{xx}| = |f''_{xy}| = |f''_{yy}| = \frac{2\,|s|}{(1+s^2)^2} \leq \frac{3\,\sqrt{3}}{8} = B\,.$$

D'après le théorème 2.3.1, l'erreur vérifie :

$$|E_1(x,y)| \leq \frac{3\,\sqrt{3}/8}{2}\,(|x-0|+|y-0|)^2 = \frac{3\,\sqrt{3}}{16}\,(|x|+|y|)^2\,.$$

Par exemple, avec $x = 0,1$ et $y = -0,2$, on aurait :

$$\begin{aligned} P_1(0,1;-0,2) &= \frac{\pi}{4} + \frac{0,1}{2} - \frac{-0,2}{2} \approx 0,9354 \\ |E_1(0,1;-0,2)| &\leq \frac{3\sqrt{3}}{16}\,(|0,1| + |-0,2|)^2 \approx 0,2923\,. \end{aligned}$$

(On a arrondi vers le haut, par sécurité.) L'approximation donne :

$$f(0,1;-0,2) \approx 0,9354 \pm 0,2923\,.$$

La calculatrice donne

$$f(0,1;-0,2) = \arctan(1,3) \approx 0,9151\,.$$

---

**Exemple 2.14** Ma calculatrice est très élémentaire. Elle ne traite que les 4 opérations usuelles. Pas de racines carrées. Comment faire pour estimer $\sqrt{(3,2)^2 + (3,9)^2}$ grâce à un développement linéaire (degré 1) de

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

autour de $(3,4)$. Il me faudrait aussi un estimé de la précision obtenue. **Solution.**

On a :

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

En $(3,4)$, ces fonctions donnent : $f(3,4) = 5$ et $f_x(3,4) = 3/5$, $f_y(3,4) = 4/5$. Le polynôme de Taylor $P_1(x,y)$ est donc :

$$P_1(x,y) = 5 + \frac{3}{5}\,(x-3) + \frac{4}{5}\,(y-4)\,.$$

L'approximation donne :

$$\sqrt{(3,2)^2 + (3,9)^2} \approx P_2(3,2\,;3,9) = 5 + \frac{3}{5} \times 0,2 + \frac{4}{5} \times (-0,1) = 5,04\,.$$

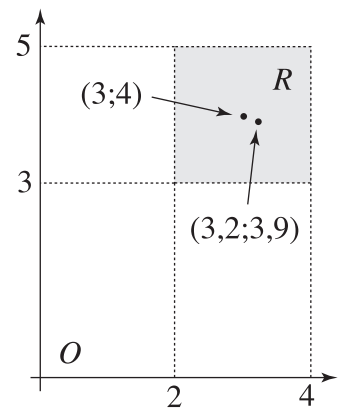
Déterminons l'erreur. Les dérivées secondes sont :

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \qquad f''_{xy} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \qquad f''_{yy} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,.$$

Cette fois, on ne pourra pas borner sur $\mathbb{R}^2$ ; il faut choisir un rectangle ouvert $R$ qui contiendra $(3;4)$ et $(3,2;3,9)$ sur lequel borner les dérivées. On pourra prendre par exemple

$$R = ]2;4[\times]3;5[\,,$$

mais d'autres choix plus précis sont possibles. Nous allons borner très grossièrement les dérivées. Pour chacune, il suffit de prendre le plus petit dénominateur possible et les plus grands numérateurs. Or, sur $R$, on a :




$$\sqrt{x^2+y^2} > 3, \quad y^2 < 5^2 = 25, \quad |xy| < 4\times 5 = 20, \quad x^2 < 4^2 = 16\,.$$

On a donc (en posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$) :

$$|f''_{xx}| = \frac{y^2}{r^3} \leq \frac{25}{3^3}, \quad |f''_{xy}| = \frac{|xy|}{r^3} \leq \frac{20}{3^3}, \quad f''_{yy} = \frac{x^2}{r^3} \leq \frac{16}{3^3}\,.$$

On peut donc prendre $B = 1$ (N.B. 25/27 serait inutilement plus précis). La borne (grossière, encore une fois) pour l'erreur sera

$$\frac{1}{2}\left(|3,2-3| + |3,9-4|\right)^2 = 0,45\,.$$

Ainsi, $\sqrt{(3,2)^2+(3,9)^2} = 5,04 \pm 0,45$. (La calculatrice donne $\sqrt{(3,2)^2+(3,9)^2} \approx 5,0447993\ldots$)

---

**Remarque.** Si la fonction à estimer est à 3 variables ($w = f(x,y,z)$), le principe est le même, la linéarisation autour d'un point $(a,b,c)$ étant :

$$P_1(x,y,z) = f(a,b,c) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\,(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\,(z-c)\,.$$

L'erreur $E_1(x,y)$ vérifiera

$$|E_1(x,y)| \leq \frac{B}{2}\left(|x-a| + |y-b| + |z-c|\right)^2,$$

où $B$ est un nombre positif tel que : $B \geq |f''_{xx}|, |f''_{xy}|, |f''_{xz}|, |f''_{yy}|, |f''_{yz}|, |f''_{zz}|$ évaluées sur un pavé ouvert $R$ contenant $(a,b,c)$ et $(x,y,z)$.

### 2.3.2 Séries et polynômes de Taylor à deux variables

Soit $y = f(x)$ une fonction d'une seule variable. Rappelons la construction de sa série de Taylor autour de $a$. Chaque terme de la série contient un facteur de forme $(x-a)^i/(i\,!)$ avec coefficient $f^{(i)}(a)$, formant le terme

$$f^{(i)}(a)\,\frac{(x-a)^i}{i\,!}\,.$$

La série est la somme de tous les termes possibles de cette forme, soit :

$$T(x) = \sum_{i\geq 0} f^{(i)}(a)\,\frac{(x-a)^i}{i\,!}\,.$$

Le polynôme de Taylor $P_n(x)$ s'obtient de la même façon, en arrêtant cependant au terme de degré inférieur ou égal à $n$ :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\,\frac{(x-a)^i}{i\,!}\,.$$

Si on passe maintenant au cas à deux variables, le procédé sera très semblable. Soit $z = f(x,y)$. La série de Taylor de $f$ autour de $(a,b)$ sera une somme de termes contenant des facteurs de forme

$$\frac{(x-a)^i}{i\,!}\,\frac{(y-b)^j}{j\,!}\,,$$

dont le coefficient sera $f^{(i+j)}_{x^iy^j}(a,b)$. Le terme correspondant est donc

$$f^{(i+j)}_{x^iy^j}(a,b)\,\frac{(x-a)^i}{i\,!}\,\frac{(y-b)^j}{j\,!}\,.$$

La série est la somme de tous les termes possibles de cette forme, soit :

$$T(x,y) = \sum_{i,j\geq 0} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\,\partial y^j}(a,b)\,\frac{(x-a)^i}{i\,!}\,\frac{(y-b)^j}{j\,!}\,.$$

(La somme porte sur tous les couples d'entiers $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.)

Le polynôme de Taylor $P_n(x)$ s'obtient de la même façon, en arrêtant cependant aux termes de degré inférieur ou égal à $n$ :

$$P_n(x,y) = \sum_{0\leq i+j\leq n} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\,\partial y^j}(a,b)\,\frac{(x-a)^i}{i\,!}\,\frac{(y-b)^j}{j\,!}\,.$$

(La somme porte sur tous les couples d'entiers $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j \leq n$.) Autrement dit, le polynôme de Taylor $P_n(x, y)$ de degré $n$ est obtenu en tronquant la série après les termes de degré $n$ (i.e. on ne garde que ceux pour lesquels $i + j \leq n$).

**Remarque.** Ces formules sont écrites pour suggérer les généralisations à 3, 4,... variables.

**Exemple 2.15** Nous allons calculer le polynôme de Taylor $P_3(x, y)$ de la fonction $f(x, y) = e^{-2y} \sin(3x)$ autour de $(0, 0)$. D'abord, on calcule les dérivées jusqu'à l'ordre 3 :

- $f_x = 3e^{-2y} \cos(3x), \quad f_y = -2e^{-2y} \sin(3x)$,
- $f_{xx} = -9e^{-2y} \sin(3x),\ f_{xy} = -6e^{-2y} \cos(3x),\ f_{yy} = 4e^{-2y} \sin(3x)$,
- $f_{xxx} = -27e^{-2y} \cos(3x)$, $f_{xxy} = 18e^{-2y} \sin(3x)$,
  $f_{xyy} = 12e^{-2y} \cos(3x)$, $f_{yyy} = -8e^{-2y} \sin(3x)$.

Ensuite, il faut les évaluer en $(a, b) = (0, 0)$ :

- $f(x, y) = 0$,
- $f_x(0, 0) = 3$, $f_y(0, 0) = 0$,
- $f_{xx}(0, 0) = 0$, $f_{xy}(0, 0) = -6$, $f_{yy}(0, 0) = 0$,
- $f_{xxx}(0, 0) = -27$, $f_{xxy}(0, 0) = 0$, $f_{xyy}(0, 0) = 12$ et $f_{yyy}(0, 0) = 0$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
P_3(x, y) = {} & 0 \\
& +3\,\frac{(x-0)}{1\,!} + 0\,\frac{(y-0)}{1\,!} \\
& +0\,\frac{(x-0)^2}{2\,!} - 6\,\frac{(x-0)}{1\,!}\frac{(y-0)}{1\,!} + 0\,\frac{(y-0)^2}{2\,!} \\
& -27\,\frac{(x-0)^3}{3\,!} + 0\,\frac{(x-0)^2}{2\,!}\frac{(y-0)}{1\,!} + 12\,\frac{(x-0)}{1\,!}\frac{(y-0)^2}{2\,!} + 0\,\frac{(y-0)^3}{3\,!}\,.
\end{aligned}$$

Après simplification, l'équation devient

$$P_3(x, y) = 3\,x - 6\,xy - 9\,x^3/2 + 6\,xy^2\,,$$

ce qui correspond bien à ce qu'on avait obtenu précédemment par d'autres méthodes.

**Remarques.**

- Les dérivées de $f(x, y)$ et de $P_n(x, y)$ concordent en $(a, b)$ jusqu'à l'ordre $n$. Les polynômes $P_n$ ressemblent donc à la fonction si $n$ est assez grand.
- Comme dans le cas à une variable, la qualité de l'approximation de $f(x, y)$ par $P_n(x, y)$ augmente avec $n$ d'une part, et avec la proximité de $(x, y)$ avec $(a, b)$ d'autre part.

---

L'erreur $E_n(x, y)$ s'estime de façon similaire aux cas vus précédemment. Si $B$ est un nombre positif tel que : $B \geq |f^{(n+1)}_{x^i y^j}|$ (pour tout $i, j$ tel que $i+j = n+1$), les dérivées étant évaluées sur un rectangle ouvert $R$ contenant $(a, b)$ et $(x, y)$, alors

$$|E_n(x, y)| \leq \frac{B}{(n+1)\,!}\,(|x-a| + |y-b|)^{n+1}\,.$$

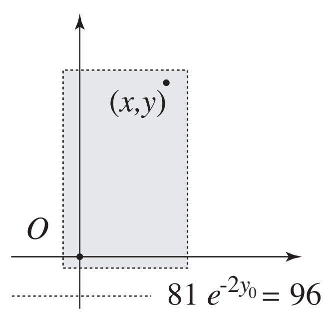
**Exemple 2.16** Examinons l'erreur associée à l'approximation dans l'exemple précédent. Les dérivées quatrièmes sont (pour $i + j = 4$)

$$f^{(4)}_{x^i y^j} = 3^i 2^j\, e^{-2y}\, \sin 3x, \quad \text{ou} \quad f^{(4)}_{x^i y^j} = 3^i 2^j\, e^{-2y}\, \cos 3x\,.$$

Pour $y \geq 0$, on aura

$$|f''_{x^i y^j}| \leq 96 = B\,,$$

sur un rectangle (assez petit) contenant $(0, 0)$ et $(x, y)$. (L'exponentielle $e^{-2y}$ étant décroissante, il faut choisir $B$ plus grand que $81 = 3^4$ pour pouvoir englober dans un *ouvert* le point $(0, 0)$. On a choisi 96 pour faciliter les calculs subséquents.) L'erreur ne dépassera pas (en valeur absolue) :




$$\frac{96}{4\,!}\,(|x| + |y|)^4 = 4\,(|x| + |y|)^4\,,$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [0, \infty[$.

---

# Exercices

**2.16** Pour chacune des fonction suivante, trouvez le développement de Taylor, jusqu'au degré $d$ indiqué autour du point $(a, b)$ donné. (N. B. Si $d = \infty$, on demande la série complète.)

a. $x^2 + 2xy + 3y^2$, autour de $(0, 0)$, pour $d = \infty$.

b. $x^2 + 2xy + 3y^2$, autour de $(2, -1)$, pour $d = \infty$.

c. $e^{2x+3y}$, autour de $(0, 0)$, pour $d = 2$.

d. $\sqrt{4 - 3x + 2y}$, autour de $(1, 0)$, pour $d = 2$.

e. $e^x \cos 3y$, autour de $(0, 0)$, pour $d = 3$.

f. $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$, autour de $(1, 0)$, pour $d = 2$.

g. $\sin(2x + y)$, autour de $(0, \pi/2)$, pour $d = 3$.

h. $(3 + 2x + y)/(1 - 2x + 3y)$, autour de $(0, 0)$, pour $d = 1$.

i. $e^{2x}\,(1 + y)^2$, autour de $(0, -1)$, pour $d = \infty$.

**2.17** Estimez les fonctions suivantes à l'aide du polynôme de Taylor indiqué. Trouvez une borne pour l'erreur d'approximation.

a. $e^{2x+3y}$, avec $P_1(x, y)$, autour de $(0, 0)$, pour $(x, y) = (-0,1; -0,2)$.

b. $e^{2x+3y}$, avec $P_2(x, y)$, autour de $(0, 0)$, pour $(x, y) = (-0,1; -0,2)$.

c. $e^{2x+3y}$, avec $P_2(x, y)$, autour de $(0, 0)$, pour $x, y < 0$.

d. $\sqrt{4 - 3x + 2y}$, avec $P_1(x, y)$, autour de $(1, 0)$, pour $(x, y) = (0,8; -0,1)$.

e. $\sin(2x + y)$, avec $P_2(x, y)$, autour de $(0, \pi/2)$, pour $x, y \in \mathbb{R}$.

f. $\sin(2x + y)$, avec $P_3(x, y)$, autour de $(0, \pi/2)$, pour $x, y \in \mathbb{R}$.

g. $f(x, y) = \sin x \sin y$, avec $P_2(x, y)$, autour de l'origine, pour $x, y \in \mathbb{R}$.

h. $f(x, y) = \cos x \cos y$, avec $P_2(x, y)$, autour de l'origine, pour $x, y \in \mathbb{R}$.

## 2.4 Séries utiles et notes historiques

Les séries de Taylor-Maclaurin furent en fait inventées par Gregory (1638–1675). Taylor (1685–1731), ignorant des travaux de Gregory, publia un ouvrage qui traitait, en particulier, des séries qui portent maintenant son nom. Elles furent ensuite popularisées par Maclaurin (1698–1746) qui donne le crédit de la découverte à Taylor. Maclaurin, excellent mathématicien malgré tout, inventa la règle de Cramer, qui lui...

La série pour $\ln(1+x)$ (ou son équivalent) a été découverte par le célèbre cartographe Mercator (1619–1687).

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots &&= \textstyle\sum_{n\ge 0} x^n \quad (\text{si } |x|<1)\\
\ln(1+x) &= x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}+\cdots &&= \textstyle\sum_{n\ge 1} (-1)^{n+1}\tfrac{x^n}{n} \quad (\text{si } -1<x\le 1)\\
e^x &= 1+x+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots &&= \textstyle\sum_{n\ge 0} \tfrac{x^n}{n!} \quad (\text{si } x\in\mathbb{R})\\
\sin x &= x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}+\cdots &&= \textstyle\sum_{n\ge 0} (-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{si } x\in\mathbb{R})\\
\cos x &= 1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+\cdots &&= \textstyle\sum_{n\ge 0} (-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{si } x\in\mathbb{R})\\
\arctan x &= x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+\cdots &&= \textstyle\sum_{n\ge 0} (-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\text{si } x\in[-1,1])
\end{aligned}
$$

La série binômiale :

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha\,x+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\,x^2+\frac{\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3+\cdots=\sum_{n\ge 0}\binom{\alpha}{n}x^n\,,$$

(pour $|x|<1$ si $\alpha\in\mathbb{R}$ ou $x\in\mathbb{R}$ si $\alpha=0,1,2,3,\ldots$)
a été découverte (pour $\alpha$ quelconque) par Newton.

N.B. Le symbole $\binom{\alpha}{k}$ se définit par :

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,,$$

ce qui donne bien le *coefficient du binôme* habituel quand $\alpha=k,k+1,k+2,\ldots$

## 2.5 Preuve de la validité de l'estimé de l'erreur

Pour les plus forts et les curieux, voici une preuve du théorème 2.1.1. D'abord une petite remarque, sous forme de théorème.

**Théorème 2.5.1** *Si $T(t) \leq L(t)$ pour tout $t$ dans un certain intervalle $[a, b]$, alors*

$$\int_a^x T(t)\, dt \leq \int_a^x L(t)\, dt\,,$$

*pour tout $x$ dans cet intervalle.*

Autrement dit, tant que le lièvre court plus vite (vitesse $L$) que la tortue (vitesse $T$), il aura couvert, à tout moment $x$, une plus grande distance que celle-ci.

Voyons comment exploiter cette remarque presque triviale pour estimer la qualité des approximations. Il suffira d'appliquer le théorème précédent (le lièvre et la tortue) deux fois à la fonction $f''(t)$. Voici comment.

Supposons que, pour une certaine constante $M \geq 0$, on ait

$$|f''(t)| \leq M \qquad \text{pour tout} \quad t \in [a, b]\,.$$

On aura alors

$$-M \leq f''(t) \leq M \qquad \text{pour tout} \quad t \in [a, b]\,.$$

On applique le théorème une première fois (pour $u \in [a, b]$) :

$$\begin{array}{ccccc} -\int_a^u M\, dt & \leq & \int_a^u f''(t)\, dt & \leq & \int_a^u M\, dt\,, \\ -M\,(u-a) & \leq & f'(u) - f'(a) & \leq & M\,(u-a)\,. \end{array}$$

Cette inégalité étant valide pour tout $u \in [a, b]$, on pourrait recommencer le procédé et appliquer le théorème une seconde fois (pour $x \in [a, b]$) :

$$\begin{array}{ccccc} -\int_a^x M\,(u-a)\, du & \leq & \int_a^x (f'(u) - f'(a))\, du & \leq & \int_a^x M\,(u-a)\, du \\ -M\, \frac{(u-a)^2}{2}\Big|_a^x & \leq & (f(u) - f'(a)\,(u-a))\Big|_a^x & \leq & M\, \frac{(u-a)^2}{2}\Big|_a^x \\ -M\, \frac{(x-a)^2}{2} & \leq & \underbrace{f(x) - (\underbrace{f(a) + f'(a)\,(x-a)}_{P_1(x)})}_{E_1(x)} & \leq & M\, \frac{(x-a)^2}{2} \end{array}$$

(en intégrant, ne pas oublier que $f'(a)$, l'image d'une constante, est elle-même constante). Ainsi,

$$|E_1(x)| \leq M\, \frac{|x-a|^2}{2\,!}\,.$$

Autrement dit, la grandeur de l'erreur $E_1(x)$ faite en remplaçant $f(x)$ par $P_1(x)$ ne dépasse pas $M\,\frac{|x-a|^2}{2\,!}$. En résumé, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.5.2** *Supposons que, pour une certaine constante $M$ (une borne), on ait $|f''(t)| \leq M$ pour tout $t$ entre $a$ et $x$. Soit $E_1(x) = f(x) - P_1(x)$ l'erreur commise en estimant $f(x)$ par $P_1(x)$. Alors*

$$|E_1(x)| \leq M\,\frac{|x-a|^2}{2\,!}\,.$$

**Remarque.** On a supposé implicitement que $x \geq a$ (en demandant que $x \in [a, x]$), mais il est facile d'adapter la preuve dans le cas où $x < a$ ; il faut renverser certaines inégalités, prises en charge par les valeurs absolues $|x-a|$ dans la borne de l'erreur.

Cette démonstration peut se généraliser aux estimés d'erreur pour les polynômes de Taylor de degré supérieur.

Le cas à deux variables se ramène à celui à une seule. Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables, dont les dérivées sont continues jusqu'au second ordre. Nous allons trouver le polynôme de Taylor $P_1(x, y)$ autour de $(a, b)$ de cette fonction ainsi qu'une borne pour le terme d'erreur. (La preuve se généralise facilement aux autres polynômes de Taylor.) Comme précédemment, le point $(x, y)$ représente le point où a lieu l'approximation et sera considéré comme fixe dans la preuve.

Soit $B \geq |f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$ partout sur un rectangle ouvert contenant $(a, b)$ et $(x, y)$. Posons $h = x - a$ et $k = y - b$ (les accroissements de chaque variable quand on passe de $(a, b)$ à $(x, y)$). On introduit une nouvelle variable $s$ et une nouvelle fonction de cette variable :

$$g(s) = f(a + sh, b + sk)\,. \tag{2.2}$$

On utilise alors l'approximation de Taylor de degré 1 autour de 0, évaluée en $s = 1$ pour estimer $g(1)$ :

$$g(1) = \underbrace{g(0) + g'(0)\,1}_{P_1(1)} \pm \underbrace{\frac{M}{2}\,1^2}_{|E_1(1)|\leq} = g(0) + g'(0) \pm \frac{M}{2}\,, \tag{2.3}$$

où

$$M \geq |g''(s)| \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq 1\,.$$

Remarquez que $g(0) = f(a, b)$ et que $g(1) = f(x, y)$. Reste à évaluer $g'(s)$ et $g''(s)$. En dérivant l'équation 2.2, le théorème des fonctions des fonctions composées donne

$$\begin{aligned} g'(s) &= f'_x(a + sh, b + sk)\frac{d(a + sh)}{ds} + f'_y(a + sh, b + sk)\frac{d(b + sk)}{ds} \\ &= h\,f'_x(a + sh, b + sk) + k\,f'_y(a + sh, b + sk)\,. \end{aligned}$$

On a donc $g'(0) = h\, f'_x(a,b) + k\, f'_y(a,b)$. L'équation 2.3 se traduit alors par :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a,b) + h\, f'_x(a,b) + k\, f'_y(a,b) \pm \frac{M}{2} \\
&= f(a,b) + (x-a)\, f'_x(a,b) + (y-b)\, f'_y(a,b) \pm \frac{M}{2} \\
&= P_1(x,y) \pm \frac{M}{2}\,.
\end{aligned}$$

Reste à estimer $M$, donc à calculer $g''(s)$. Partant de

$$g'(s) = h\, f'_x(a+sh, b+sk) + k\, f'_y(a+sh, b+sk)\,,$$

on peut réappliquer le théorème des fonctions des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
g''(s) &= h\, \frac{d}{ds} f'_x(a+sh, b+sk) + k\, \frac{d}{ds} f'_y(a+sh, b+sk) \\
&= h\, \big(h\, f'_{xx}(a+sh, b+sk) + k\, f'_{xy}(a+sh, b+sk)\big) \\
&\quad +k\, \big(h\, f'_{yx}(a+sh, b+sk) + k\, f'_{yy}(a+sh, b+sk)\big) \\
&= h^2\, f'_{xx}(a+sh, b+sk) + 2\, hk\, f'_{xy}(a+sh, b+sk) \\
&\quad +k^2\, f'_{yy}(a+sh, b+sk)\,.
\end{aligned}$$

On peut alors borner la dérivée (pour $0 \le s \le 1$) :

$$\begin{aligned}
|g''(s)| &\le |h|^2\, |f'_{xx}(a+sh, b+sk)| + 2\, |h|\, |k|\, |f'_{xy}(a+sh, b+sk)| \\
&\quad +|k|^2\, |f'_{yy}(a+sh, b+sk)| \\
&\le |h|^2\, B + 2\, |h|\, |k|\, B + |k|^2\, B \\
&= B\, (|h|^2 + 2\, |h|\, |k| + |k|^2) \\
&= B\, (|h| + |k|)^2 \\
&= B\, (|x-a| + |y-b|)^2
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $M = B\, (|x-a| + |y-b|)^2$, ce qui donne finalement

$$f(x,y) = P_1(x,y) \pm \frac{B}{2}\, (|x-a| + |y-b|)^2\,. \quad \square$$

# Section 3

# Équations différentielles

## 3.1 Bref rappel des méthodes de résolution

### 1. É.D. *séparable*

| | |
|---|---|
| Forme | $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$.<br>Le coefficient de $dx$ ne dépend que de $x$ ; celui de $dy$ ne dépend que de $y$. |
| Méthode | Il suffit d'intégrer : $\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C$. |
| Exemple | $e^{x+2y}\,dy + e^{2x}\,dx = 0$.<br>Séparer les variables : $e^{2y}\,dy + e^{x}\,dx = 0$.<br>Intégrer : $\int e^{2y}\,dy + \int e^{x}\,dx = 0 \implies e^{2y}/2 + e^{x} = K$.<br>Isoler une des variables si possible et pas trop laid : $y = 1/2\ \ln(C - 2e^{x})$. |

### 2. É.D. *homogène*

| | |
|---|---|
| Forme | $y' = h(y/x)$, où $h(v)$ est une fonction de $v$ seulement. |
| Méthode | Poser $v = y/x$ (ce qui donne $y = xv$).<br>En dérivant cette relation, on obtient $y' = xv' + v$.<br>L'équation différentielle devient $xv' + v = h(v)$ qui est séparable. |
| Exemple | $y' = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$.<br>Le membre de droite est $y/x + \sqrt{1 - y^2/x^2} = v + \sqrt{1 - v^2}$.<br>L'équation différentielle devient $y' = xv' + v = v + \sqrt{1 - v^2}$,<br>qui se simplifie en $\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = dx/x$.<br>Sa solution est $\arcsin v = \ln\lvert x\rvert + C$, d'où $y/x = v = \sin(\ln\lvert x\rvert + C)$ et $y = x\ \sin(\ln\lvert x\rvert + C)$. |

## 3. É.D. *linéaires*

| | |
|---|---|
| Forme | $y' + p(x)\,y = q(x)$ (N.B. Si $q(x) \equiv 0$, l'équation est séparable ...) |
| Méthode | Poser $P(x) = \int p(x)\,dx$.<br>Multiplier l'équation différentielle par le facteur intégrant $e^{P(x)}$ donne<br>$$e^{P(x)}y' + e^{P(x)}p(x)y = e^{P(x)}q(x)\,.$$<br>Ceci s'intègre au moins en principe : le membre de gauche est $(e^{P(x)}y)'$. |
| Remarque | Les solutions ont toujours la forme<br>$$y = Cy_g + y_p$$<br>où $y_g$ est une solution non nulle de l'équation *homogène* $y' + p(x)y = 0$<br>et où $y_p$ est une *solution particulière* de l'équation $y' + p(x)\,y = q(x)$. |
| Exemple | $y' + 3y = e^x$.<br>Ici $p(x) = 3$, $P(x) = 3x$ et le facteur intégrant $e^{3x}$. Après multiplication, on a la chaîne d'équations :<br>$$e^{3x}y' + 3e^{3x}y = e^{4x} \Rightarrow (e^{3x}y)' = e^{4x} \quad \Rightarrow \quad e^{3x}y = e^{4x}/4 + K$$<br>$$\Rightarrow \quad y = Ke^{-3x} + e^x/4\,.$$<br>(Ici, $y_g = e^{-3x}$ et $y_p = e^x/4$.) |

## 4. É.D. *de Bernoulli*

| | |
|---|---|
| Forme | $y' + p(x)y = q(x)y^n$ (avec $n \neq 0, 1$ sinon elle est linéaire). |
| Méthode | Diviser l'équation par $y^n$, pour obtenir $y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$.<br>Poser $z = y^{1-n}$ (donnant $z'/(1-n) = y^{-n}y'$).<br>L'équation devient : $z'/(1-n) + p(x)z = q(x)$ qui est linéaire. |
| Exemple | $y' - y = -e^x y^4/3$.<br>Diviser par $y^4$ pour obtenir $y^{-4}y' - y^{-3} = -e^x/3$.<br>Poser $z = y^{1-4} = y^{-3}$, donnant $-z'/3 = y^{-4}y'$.<br>L'équation devient $-z'/3 - z = -e^x/3 \Longrightarrow z' + 3z = e^x$ qui est linéaire.<br>Sa solution est donc $z = Ce^{-3x} + e^x/4$ (voir l'exemple précédent).<br>Changer $z = y^{-3}$ et isoler $y$ : $y = (Ce^{-3x} + e^x/4)^{-1/3}$. |

## 5. É.D. *exacte*

| | |
|---|---|
| Forme | $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ avec $M'_y = N'_x$. |
| Méthode | Le membre de gauche est la différentielle ($dF = F'_x\,dx + F'_y\,dy$) d'une fonction $F(x,y)$. Il suffit de résoudre $F'_x = M$ et $F'_y = N$.<br>L'équation différentielle devient $dF = 0$, d'où $F(x,y) = C$. |
| Exemple | $y\,dx + (x+2y)\,dy = 0$. Ici, $M = y$ et $N = x+2y$ ; on a bien $M_y = 1 = N_x$.<br>On a donc $F_x = M = y$ (d'où $F = xy + g(y)$, pour une certaine fonction $g(y)$), et $F_y \equiv x + g'(y) = x + 2y$ (d'où $g'(y) = 2y$ et $g(y) = y^2$).<br>On trouve donc $F \equiv xy + y^2$. Comme l'équation de départ est $dF \equiv d(xy + y^2) = 0$, elle conduit à la solution $xy + y^2 = C$. |

## 6. É.D. *non-exacte (facteur intégrant)*

| | |
|---|---|
| Forme | $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ avec $M'_y \neq N'_x$. |
| Méthode | On peut espérer que (pour une certaine fonction $\mu(x)$ *qui ne dépend pas de* $y$) l'équation $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ soit exacte. Autrement dit, que les dérivées $$\frac{\partial(\mu\,M)}{\partial y} = \mu\frac{\partial M}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(\mu\,N)}{\partial x} = \mu\,\frac{\partial N}{\partial x} + \mu'\,N \qquad \text{soient égales.}$$ |
| Exemples | **1.** $xy\,dx + x(x+2y)\,dy = 0$ n'est pas exacte.<br><br>L'équation $\dfrac{\partial(\mu\,M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu\,N)}{\partial x}$ donne ici $\dfrac{\partial\mu\,xy}{\partial y} = \dfrac{\partial\mu\,(x^2+2xy)}{\partial x}$ ou, après simplification : $x\mu = (2x+2y)\mu + x(x+2y)\mu'$. On a alors $\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{-(x+2y)}{x(x+2y)} = -1/x$. Donc $\ln\mu = -\ln x$ et $\mu = 1/x$. L'équation $1/x\,(xy\,dx + x(x+2y)\,dy) = 0$ est exacte. Il s'agit en fait de $y\,dx + (x+2y)\,dy = 0$ (voir l'exemple précédent).<br><br>**2.** $xy\,dx + y(2x+y)\,dy = 0$ n'est pas exacte.<br><br>On cherche un facteur intégrant de forme $\mu(x)$. On aura, après simplification : $x\mu = 2y\mu + y(2x+y)\mu'$. On a donc $\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{x-2y}{y(2x+y)}$. Mais ceci est impossible : $\dfrac{\mu'}{\mu}$ ne dépend pas de $y$ alors que $\frac{x-2y}{y(2x+y)}$ dépend de $y$. Il n'y a donc pas de facteur intégrant de forme $\mu(x)$.<br>(Il peut cependant en exister de forme $\mu(y)$ (on peut alors adapter la méthode) ou de forme $\mu(x+y)$ ou $\mu(xy)$ ou...) |

# Exercices (d'après les notes de cours de Pauline Hébert)

## Solutions d'équations différentielles

**3.1** Vérifiez que la relation donnée est solution de l'équation différentielle correspondante :

a. $y = A\,e^{-x} + B\,x\,e^{-x} + x - 2$ solution de $y'' + 2y' + y = x$.

b. $(y - C)^2 = Cx$ solution de $4x(y')^2 + 2xy' = y$.

c. $y = 2x^3 + Ax$ solution de $x\,dy - y\,dx = 4x^3\,dx$.

d. $y = x\,\sin(C - \ln|x|)$ solution de $(x\,y' - y)^2 = x^2 - y^2$.

e. $(1 - x)\,y^2 = x^3$ solution de $2x^3y' = y\,(y^2 + 3x^2)$.

f. $y = A\sin x + B\,x$ solution de $(1 - x\cot x)\,y'' - x\,y' + y = 0$.

g. $\sqrt{x^2 + y^2} + x = C\,x\,y$ solution de $x^2y' + y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$.

## Variables séparables

**3.2** Résoudre :

a. $\sqrt{1 - x^2}\,y' = \sqrt{1 - y^2}$.

b. $(y + x^2y)\,dy + (x + x\,y^2)\,dx$.

c. $y\,\cot x\,dy - \sec y\,dx = 0$.

d. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1 + y^3}{xy^2(1 + x^2)} = 0$.

e. $\dfrac{\ln|y|}{\ln|x|}\,dy - \dfrac{x^4}{y^2}\,dx = 0$.

f. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{4uv}{v^2 + 1}$.

g. $x^3y' = y^2(x - 4)$ avec $y(1) = 1$.

h. $(x^2 - x)\,dy + y^2\,dx = y\,dx$ avec $y(2) = 2$.

i. (*) $y\,dx - x\,dy = x\,y^2\,e^x\,dx$. (Sugg.: poser $t = x/y$.)

j. (*) $y\,dx + x\,dy + (1 + xy)\,dx = 0$. (Sugg.: faire un changement de variables.)

**3.3** Pour résoudre les équations différentielles suivantes, rappelez-vous que $y'' = \frac{dy'}{dx}$.

a. $y'' - 4y' = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

b. $y'' - 2y' = 0$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

c. $y'' - 2\,y\,y' = 0$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

d. $2\,y'\,y'' + 18\,y\,y' = 0$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

e. $y'' + 9\,y = 0$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

f. (*) Un réservoir de $4\,\pi$ m$^3$ de volume, initialement plein d'eau, se vide par un trou de 2 cm de rayon situé à sa base. Dans ce cas, la vitesse de sortie de l'eau est de $0,25\,\sqrt{h}$ m/s, où $h$ est le niveau d'eau (en m) restant dans le réservoir au temps $t$. En combien de temps le réservoir se vide-t-il si :

(i) il est cylindrique de 2 m de rayon ?

(ii) il est conique (pointe en bas) de 2 m de rayon ?

g. (*) Un mobile se déplace en ligne droite, à l'horizontale. La force de résistance au milieu est proportionnelle au carré de sa vitesse. Partant à 10 m/s, il se déplace à 1 m/s au bout de 5 s. À quel moment a-t-il perdu 99% de sa vitesse ?

h. (*) Une masse se déplace selon l'axe (horizontal) d'un ressort. La force exercée par ce dernier sur la masse est proportionnelle au déplacement de la masse. À $t = 0$, le déplacement est de 1 m et la vitesse nulle. La masse revient à la position initiale en 1 s. Quelle est la vitesse maximale de la masse ?

## Équations homogènes

**3.4** Résoudre :

a. $x\,y' - \sqrt{x^2 - y^2} - y = 0$.

b. $y\,y' + x - 2y = 0$.

c. $(x^2 + y^2)\,\frac{dy}{dx} - xy = 0$.

d. $(x^2 + y^2)\,dy = 2xy\,dx$.

e. $x^2 dy + y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)\,dx$.

f. $x^2\,\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 + y^2\right)\,\arctan(y/x) - xy = 0$.

g. $\left(\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}\right)\,\ln\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y}$.

h. $\left(x^3 + y^3\right)\,dx = 3xy^2\,dy$.

i. $y' = \dfrac{3x^2 + 6xy - y^2}{5x^2 + 2xy + y^2}$.

**3.5** a. L'équation d'une famille de courbes est $2xyy' + x^2 - 3y^2 = 0$. Laquelle passe par le point $(1, 2)$.

b. La pente en tout point $(x, y)$ d'une certaine courbe est égale au carré de la pente du segment reliant le point à l'origine. Quelle est la courbe, sachant qu'elle passe par $(1, 2)$ ?

**3.6** (*)

a. Comment pourrait-on adapter le truc de cette section pour résoudre l'équation *presque* homogène $y' = (y - 2)/(x + 1) - 1$ ?

b. La tangente en $(x, y)$ d'une certaine courbe passe toujours par $(-1, x+3)$. Quelle est la courbe passant par $(1, 1)$ qui a cette propriété ?

**3.7** (*) Dans la pièce où Félix (le chat) dort en $(0, 1)$ on a placé un miroir perpendiculaire au plan $XY$ sur la droite $y = x$ ainsi qu'un bol de lait en $(0, 0)$. À son réveil, Félix croit voir un rival à travers le miroir. Il tente de s'interposer entre ce dernier et le bol de lait en se déplaçant vers le point milieu reliant son image au bol. Décrire son trajet.

## Équations linéaires (ordre 1)

**3.8** Résoudre :

a. $y' - y = (3x^2 + 4x - 3)\, e^x$.

b. $x\, dx + y\, dy = e^{2x} dx - \sin x\, dx$.

c. $y\, \ln y\, dx + (x - \ln y)\, dy = 0$.

d. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{2x - 3} = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 3}}$.

e. $y^2 dx - (2xy + 4)\, dy = 0$.

f. $\dfrac{dy}{dx} + y\, \cot x = 5\, e^{\cos x}$ avec $y(\pi/2) = -4$.

g. $\left(y\, \cos 2x + 2\, \sin^{3/2} 2x\right)\, dx + \sin 2x\, dy = 0$.

h. $(a^2 - x^2)\, y' + 2ay = (a^2 - x^2)^2$.

i. $dx - xy\, dy = y^3\, dy$.

j. $\sqrt{1 + x^2}\; y' = y$.

k. $\sqrt{1 + x^2}\; y' + y = 8\, \sqrt{1 + x^2}$.

l. (*) $e^y\, dy + e^y\, dx = 4\, \sin x\, dx$.

m. (*) $\sin y\, dy + \sin^2 x\, \cos x\, dx = 2\, \cos x\, \cos y\, dx$.

n. (*) On place un corps à 0° C dans un four qu'on vient d'éteindre. La température du four, $t$ minutes après le début de l'expérience est de $180\, e^{-t/10}$ (en °C). Sous l'hypothèse que la température du corps varie proportionnellement à la différence de température entre le four et le corps (la constante de proportionnalité étant 1/5 $\text{min}^{-1}$), quelle est la température maximale atteinte par le corps ?

o. (*) En tout point $A = (x, y)$ d'une certaine courbe, le trapèze limité par les axes de coordonnées, la tangente à la courbe en $A$ et la droite verticale passant par $A$ a une aire constante égale à 1. Quelle est la courbe vérifiant cette propriété et passant par $(1, 1)$ ? (On ne s'intéressera qu'à la portion de la courbe qui se trouve dans le premier quadrant.)

## Équations de Bernoulli

**3.9** Résoudre :

a. $y' + y/x = x^2y^2 \sin(x^2)$.

b. $2y^3\, dx + e^{-x}dx + 3xy^2\, dy = 0$.

c. $dy + xy^4dx + 2xy\, dx = 0$.

d. $\dfrac{dy}{dx} + y + y^2 \sin x = y^2 \cos x$.

e. $3\, dy + y\, dx = (1 - 2x)\, y^4\, dx$.

f. $y' + y\, \tan 2x = y^3 \cos 2x$.

g. $xy - x^3y^3 + (1 + x^2)\, y' = 0$.

h. $dx - x^5y\, dy = x\, dy$.

**3.10** (*) Si la tangente en $A = (x, y)$ à une certaine courbe coupe l'axe $OY$ en $B$, on a $|AB| = |OB|$. Quelle est la courbe vérifiant cette propriété, passant par $(1, 1)$ ?

## Équations différentielles exactes

**3.11** Vérifiez que les expressions suivantes sont des différentielles exactes et trouvez de quelle fonction :

a. $x\, dy + y\, dx = d\,(\,?\,)$.

b. $2yt^2\, dy + 2ty^2\, dt$.

c. $2tx\, dx + x^2\, dt$.

d. $dt/x - (t/x^2)\, dx$.

e. $2t\, e^{4y}\, dt + 4t^2e^{4y}\, dy$.

f. $3y^2 \sin x\, dy + y^3\, \cos x\, dx$.

g. $x\, e^{xy}dy + y\, e^{xy}\, dx$.

h. $(x\, dy + y\, dx)\, /xy$.

i. $y^4/x\, dx + 4y^3\, \ln x\, dy$.

j. $\left(2xy\, dy - y^2\, dx\right)/x^2$.

k. $(x\, dy - y\, dx)\, /\left(x^2 + y^2\right)$.

l. $(x\, dy - y\, dx)\, /x^2$.

m. $(dx + dy)/(x + y)$.

n. $(x\, dy - y\, dx)\, /\left(4x^2 + y^2\right)$.

o. $\frac{8x\, dy - 2y\, dx}{4x^2 + y^2}$.

**3.12** Vérifiez que les équations suivantes sont exactes et résoudre :

a. $(\cos x - \cos y)\, y' = y\, \sin x$.

b. $3x^2 dx - 2xy\, dy = y^2 dx - 3\, dy$.

c. $y\, \left(e^{xy} + 1/x\right)\, dx + \left(x\, e^{xy} + \ln x\right)\, dy = 0$.

d. $\left(3x^2 + 4xy - y^2 - 2\right)\, dx + \left(2x^2 - 2xy + 3y^2 + 3\right)\, dy = 0$.

e. $\left(x - y^2 + 2y\right)\, \dfrac{dy}{dx} + y - 3x^2 + 2 = 0$.

f. $\left(6x^2y - 6xy^2 - 4y^3 + 3x - 2y\right)\, \dfrac{dy}{dx} + 2x^3 + 6xy^2 - 2y^3 + 4x + 3y = 0$.

g. $\left(y\, \sqrt{x^2+y^2} - x\right)\, \dfrac{dy}{dx} + \left(x\, \sqrt{x^2+y^2} - y\right) = 0$.

h. $\left(2xy\, e^{x^2y} + y^2\, e^{xy^2} + 1\right)\, dx = \left(2y - x^2\, e^{x^2y} - 2xy\, e^{xy^2}\right)\, dy$.

## Facteurs intégrants

**3.13** Trouvez (si possible à l'oeil) le facteur intégrant rendant exacte les différentielles suivantes :

a. $2y^2\, dx + 2xy\, dy$.
b. $dx - 2x/y\, dy$.
c. $x\, dy + dx$.
d. $y/(2x-3)\, dx + dy$.
e. $y\, dx - dy$.
f. $3x^5y^5\, dx + 5x^6y^4\, dy$.
g. $e^t\, dt + 4\, \cot x\, e^t\, dx$.
h. $3x^2\, dy + 2xy\, dx$.
i. $2y\, dy + y^2\, \tan x\, dx$.
j. $y\, dx - 2x\, dy$.
k. $y\, dx - x\, dy$.
l. $3y/(2x-3)\, dx + dy$.
m. $dx - xy\, dy$.

**3.14** Résoudre :

a. $x\, dy = y\,(1+y)\, dx$.

b. $x^2y' + xy + x^2 + 1 = 0$.

c. $\left(x - 2x^2\, \ln y\right)\, dy = y\, dx$.

d. $\left(3x^5y^5 - 2y\right)\, dx + \left(5x^6y^4 + x\right)\, dy = 0$.

e. $x\, \dfrac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = y$.

f. $\left(x - x^2 - y^2\right)\, dy - y\, dx = 0$.

g. $y\, dx - y^2\, \sin^2 x\, dx = x\, dy$.

h. $\left(x^2 + y^2 + x\right)\, dx + y\, dy = 0$.

i. $x\, dy + y\, dx = 2x^2y\, dx$.

## Méthodes diverses

**3.15** Résoudre :

a. $(1+x^2)\,\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2.$

b. $y^3 \sin x\, dy + y^4 \cos x\, dx = dx.$

c. $\left(3x^2y^2 - 3x + 1/y\right)\, y' + 2xy^3 - 3y = 0.$

d. $y' \cos x + 2y \sin x = \cos x + \cos^2 x.$

e. $xy\, y' = 2y^2 - x^2.$

f. $x(x-2)\, dy + (4y - x^2 + 2x)\, dx = 0.$

g. $\dfrac{(x+y)\, dy + (4x-y)\, dx}{4x^2+y^2} = 0.$

h. $2y\, dy + 4x^3 \sqrt{4-y^4}\, dx = 0.$

i. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}.$

j. $\left(2y^3 + e^{-x}\right)\, dx + 3xy^2\, dy = 0.$

k. $(3x+y)\, dx + (x-4y)\, dy = 0.$

l. $xy^2\left(1+x^2\right)\, dy + \left(1+y^3\right)\, dx = 0.$

m. $e^{y/x}y' = 2\left(e^{y/x} - 1\right) + (y/x)\, e^{y/x}.$

n. $y\, dx + (x - y\cos y)\, dy = 0.$

o. $dy = x^3\sqrt{e^{2y}+4}\, dx.$

p. $y\, dx - x\, dy + \ln x\, dx = 0.$

q. $(x+y)\, dx - (x-y)\, dy = 0.$

r. $2xy^3\, dx + 3x^2y^2\, dy = 0.$

**3.16** Résoudre :

a. $(y\ln x - 2)\, y\, dx + x\, dy$ avec $y(1) = 1/4.$

b. $x^2y' + (1-2xy) = x^2$ avec $y(1) = 1-e.$

c. $(2x+y+1)\, dx + (x+3y+2)\, dy = 0$ avec $y(0) = 0.$

d. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\,(y^2+1)}{y^3(x-1)}$ avec $y(2) = 2.$

e. $(3xy+2)\, dx + x^2 dy = 0$ avec $y(1) = 1.$

f. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{xt}{x^2+t^2}$ avec $x(0) = 1.$

g. $\sin y\, \cos x\, (dx - 2\, dy) - \cos y\, \sin x\, (2\, dx - dy) = 0$ avec $y(\pi/4) = \pi/4.$

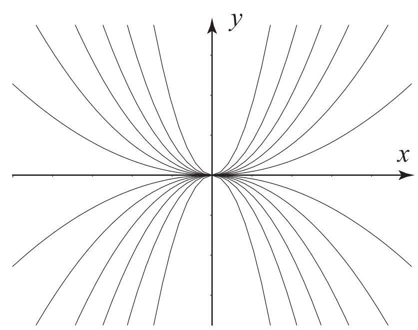
## 3.2 Exemples et méthodes de modélisation

Maintenant que nous savons comment résoudre des équations différentielles, nous verrons comment traduire certaines situations à l'aide de ces équations. La plupart utilisent l'interprétation géométrique de la dérivée en terme de pente de la tangente ou, plus généralement l'interprétation comme taux de variation. Certaines relient diverses interprétations physiques, notamment le lien entre l'accélération (et donc les forces) appliquée à un mobile et la vitesse de celui-ci.

### 3.2.1 Géométrie et dérivée

Commençons par quelques exemples géométriques simples.

**Exemple 3.1 (Familles de courbes)**
Trouvez l'équation différentielle de la *famille* (ensemble) de paraboles d'axe vertical et de sommet à l'origine.




**Solution.** Celle-ci peut se décrire par l'équation

$$y = Cx^2\,.$$

Pour chaque valeur de $C$, on obtient un membre de la famille. Ainsi, $y = 3x^2$, $y = -\sqrt{\pi}x^2$, …en font partie.

---

La description de la famille fait intervenir un paramètre $C$. On peut aussi la décrire par une équation différentielle *ne contenant pas de paramètre* :

$$xy' = 2y\,.$$

Cette équation se résout facilement : la séparation des variables donne $dy/y = 2\,dx/x$, l'intégration donne $\ln y = 2(\ln x) + K$, et finalement, en isolant $y$ : $y = Cx^2$.

On peut dire que, dans ce sens, $xy' = 2y$ est l'équation différentielle de la famille $y = Cx^2$.

Il est donc facile de trouver la forme paramétrique de la famille de courbes décrites par une équation différentielle, il s'agit simplement de la famille solution de l'équation. Examinons le passage inverse.

Partant de $y = Cx^2$, il faut éliminer le paramètre (au coût d'une dérivée). On peut le traiter s'il était une constante d'intégration. Ceci suggère d'isoler le paramètre (on obtient $y/x^2 = C$) et de dériver de chaque côté : $0 = (x^2y' -$

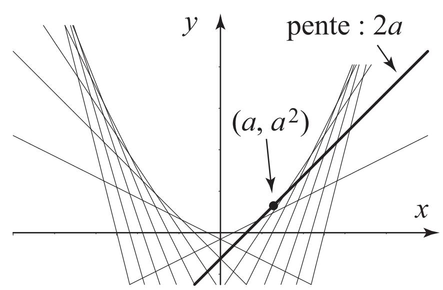
$2xy)/x^4$. Plus de paramètre. Si on simplifie le dernier résultat, on a $xy' = 2y$, l'équation différentielle de la famille.

On peut aussi éviter d'isoler $C$ en procédant comme suit. Dériver l'équation de départ : $y' = 2Cx$ et utiliser les deux équations $y' = 2Cx$ et $y = C\,x^2$ pour éliminer le paramètre. La première donne : $y'/(2x) = C$, qu'on reporte dans la seconde : $y = (y'/(2x))\,x^2 = xy'/2$. En simplifiant, on obtient encore $xy' = 2y$.

**Exemple 3.2** Trouvez l'équation différentielle de la famille de droites tangentes à la parabole $y = x^2$.

**Solution.** Pour commencer, il faut trouver l'équation paramétrique de la famille des droites tangentes. Considérons un point $(a, a^2)$ de la parabole. La pente de la tangente en ce point est

$$y'|_{x=a} = 2x|_{x=a} = 2a\,.$$




Comme la tangente passe par $(a, a^2)$, son équation sera $y - a^2 = 2a(x - a)$, ou plus simplement :

$$y = 2ax - a^2\,.$$

Cherchons l'équation différentielle. Cette fois, il n'est pas intéressant d'isoler immédiatement le paramètre $a$.

En dérivant, on a : $y' = 2a$, d'où $a = y'/2$. On peut alors remplacer dans $y = 2ax - a^2$ pour éliminer la paramètre et obtenir l'équation différentielle $y = xy' - y'^2/2$.

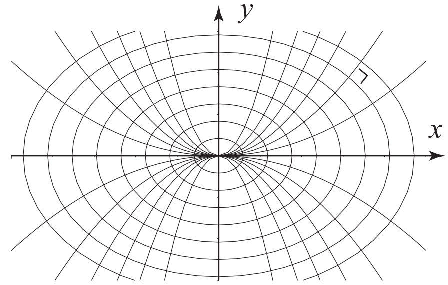
---

**Exemple 3.3 (Famille de courbes orthogonales à une autre)**

Étant donnée une famille de courbes, il arrive parfois qu'on recherche la famille de courbes orthogonales (par rapport à la première famille). Par exemple, en physique, les lignes de flots et des courbes équipotentielles sont orthogonales.

On cherche ici une famille dont toutes les courbes coupent celles de la famille donnée à angle droit. (Comme sur une grille rectangulaire, ou sur une “cible”.) Si $y'$ décrit les pentes de la famille donnée, les pentes des courbes de la famille orthogonale seront $-1/y'$.

Ainsi, l'équation différentielle de la famille de courbes orthogonales à la famille de paraboles $xy' = 2y$ (de l'exemple 3.1) sera : $x(-1/y') = 2y$. En simplifiant, on obtient $2yy' + x = 0$.
Pour "voir" la famille résultante, il suffit de résoudre l'équation différentielle $2yy' + x = 0$. Séparer les variables pour obtenir $2y\,dy = -x\,dx$ et intégrer. On obtient $y^2 + x^2/2 = C$. Il s'agit donc d'une certaine famille d'ellipses.




Plusieurs auteurs donnent une façon similaire de procéder : partir de l'équation de la famille donnée (ici $xy' = 2y$), isoler la pente (ici $y' = 2y/x$). Prendre l'inverse de l'opposée de la pente (ici $y' = -x/(2y)$). En simplifiant, on retrouve encore l'équation $(2yy' + x = 0)$ de la famille orthogonale. C'est la même méthode que précédemment, exprimée autrement.

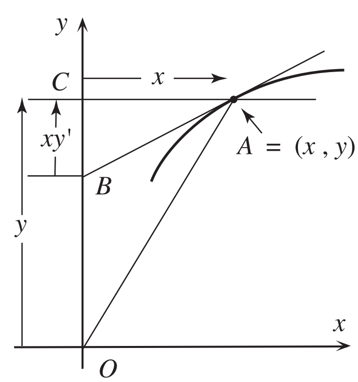
---

**Exemple 3.4 (Usage de la pente)**

Partant de n'importe quel point $A$ d'une certaine courbe, si on trace la tangente qui coupe l'axe vertical en $B$, le triangle $OAB$ a une aire constante égale à 1. Quelle est cette courbe ?

**Solution.** Soit $(x, y)$ les coordonnées de $A$ (un point variable sur la courbe). Soit $C = (0, y)$ le point de rencontre de la droite horizontale issue de $A$ avec l'axe vertical. Puisque la pente de la tangente $AB$ est $y'$, la hauteur $(CB)$ du triangle $ABC$ sera $xy'$.

Considérons le triangle $OBA$. Sa base $OB$ mesure $OC + CB = y - xy'$ et sa hauteur $CA = x$. Son aire est donc $(y - xy')x/2 = 1$. Nous avons notre équation différentielle ! Elle se simplifie en $x^2y' - xy = -2$. Il ne reste plus qu'à la résoudre, un exercice facile ! Vous trouverez $y = 1/x + Kx$.




---

**Exemple 3.5 (La spirale logarithmique)**

L'angle entre la tangente au point $P$ d'une certaine courbe et la droite passant par l'origine et $P$ est toujours de $\pi/4$.

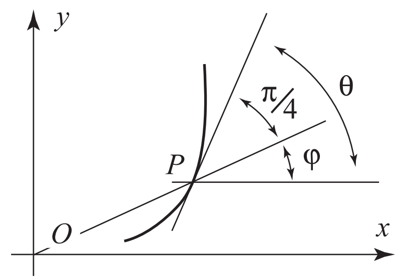
**Solution.**

Soit $(x, y)$ les coordonnées d'un point $P$ de la courbe. Soit $\theta$ l'angle que fait $OP$ avec l'horizontale et $\phi$ l'angle de la tangente issue de $P$ avec l'horizontale. La donnée du problème affirme que $\phi - \theta = \pi/4$. On a donc $\tan(\phi - \theta) = 1$, qui conduit à

$$\frac{\tan(\phi) - \tan(\theta)}{1 + \tan(\phi)\,\tan(\theta)} = 1\,.$$

Comme $\tan(\phi) = y'$ et $\tan(\theta) = y/x$, on a

$$\frac{y' - y/x}{1 + y'\,y/x} = 1\,,$$




qui se simplifie en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

qui est homogène.

On pose $v = y/x$ (d'où $y' = v + xv'$), ce qui conduit à $v + xv' = \frac{1+v}{1-v}$, puis à $x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$. La séparation des variables donne

$$\frac{1 - v}{1 + v^2}\,dv = \frac{dx}{x}$$

et l'intégration

$$\arctan(v) - \frac{1}{2}\,\ln(1 + v^2) = \ln|x| + C\,.$$

On revient aux variables de départ

$$\arctan(y/x) - \frac{1}{2}\,\ln(\frac{x^2 + y^2}{x^2}) = \ln|x| + C\,,$$

qui se simplifie en :

$$\arctan(y/x) - \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = C\,.$$

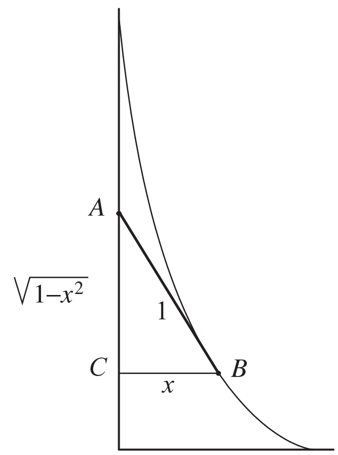
Il est plus facile de comprendre cette courbe si on utilise les coordonnées polaires. Elle devient alors : $\theta - \ln(r) = C$, ce qui permet d'isoler une des variables

$$r = K\,e^{\theta}\,.$$

**Exemple 3.6 (La tractrice)**

Les extrémités $A$ et $B$ d'un bâton rigide reposent aux points $A$ (initialement en $(0,0)$) et $B$ (initialement en $(1,0)$). Si $A$ se déplace dans la direction positive de l'axe des $y$, quelle sera la courbe décrite par $B$ ? (C'est ce qui arrive quand un camion de pompier tente un virage à angle droit.)

**Solution.** Il faut comprendre que puisque $B$ se déplace toujours en direction de $A$, le segment $AB$ est tangent à la trajectoire de $B$. Au moment où $B$ se trouve en $(x,y)$, la pente de $AB$ sera $y'$. Si l'horizontale issue de $B$ coupe l'axe vertical en $C=(0,y)$, le triangle $ABC$ est rectangle en $C$. Le rapport des côtés $AC$ et $CB$ donne aussi cette pente, d'où :




$$y' = -\sqrt{1-x^2}/x\,.$$

L'intégration (utiliser les table !) conduit à :

$$y = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2} + K\,.$$

Comme $B$ passe par $(1,0)$, on peut déterminer la constante $K$ : elle est nulle.

## 3.2.2 Taux de variation

**Exemple 3.7 (Population)**

Plusieurs modèles démographiques conduisent à des équations différentielles simples, que vous avez vues dans des cours précédents. On peut les revoir brièvement ici.

a. Une population ($P$) de bactéries se remplace (au cours du temps $t$) à un taux proportionnel à la quantité de bactéries présentes. On peut alors écrire :

$$\underbrace{\text{TVI de } P \text{ par rapport à } t}_{\frac{dP}{dt}} \quad \underbrace{\propto}_{=k\times} \quad \underbrace{\text{population présente}}_{P},$$

soit : $\frac{dP}{dt} = kP$. La solution est, bien sûr : $P = Ce^{kt}$.

b. Dans la même situation, on peut aussi prélever une quantité fixée ($Q$) de bactéries par unité de temps. L'équation devient : $\frac{dP}{dt} = kP - Q$. La solution est : $P = Ce^{kt} + Q/k$.

c. On peut aussi modéliser une population qui croît proportionnellement à la population présente et aux ressources disponibles (espace restant dans le vase de Pétri, par exemple, dans le cas de cultures bactériennes). Comme les ressources décroissent avec la population, on peut alors écrire :

$$\underbrace{\text{TVI de } P \text{ par rapport à } t}_{\dfrac{dP}{dt}} \quad \underbrace{\propto}_{= k\times} \quad \underbrace{P \times \text{ressources disponibles}}_{P \times (L-P)},$$

soit : $\frac{dP}{dt} = kP(L-P)$. C'est le modèle *logistique*.

d. Ainsi, lors d'une épidémie de grippe, la proportion ($p(t)$) de personnes infectées augmente selon la probabilité de rencontre entre une personne infectée et une personne non-infectée. La proportion de personnes infectées varie donc proportionnellement à $p$ et à $1-p$. On a alors : $\frac{dp}{dt} = kp(1-p)$ ; encore un modèle logistique.

Appliqués à des populations animales ou humaines, ces modèles sont souvent trop simples, mais ils ouvrent la porte à des modèles plus réalistes. Ainsi, dans le modèle de grippe, on n'a pas tenu compte de plusieurs facteurs : une personne infectée ne le reste pas indéfiniment ; elle est ensuite moins infectable (par cette souche de la maladie) ; certaines personnes sont plus facilement infectables que d'autres ; les rencontres ne se font pas toujours au hasard ; ... On pourrait créer des modèles plus raffinés qui tiennent compte (plus ou moins bien) des facteurs précédents. Il ne faut pas oublier qu'un modèles n'est pas la réalité et ne contient que ce qu'on a bien voulu y mettre.

---

**Exemple 3.8 (Loi de refroidissement de Newton)**

Newton avait formulé l'hypothèse que la température d'un corps varie au cours du temps en proportion de la différence entre la température ambiante et la température du corps. (Il voulait estimer la température d'une barre métallique chauffée au rouge.)

Si $T$ est la température du corps au temps $t$ et $T_a$ celle du milieu ambiant, on peut écrire :

$$\underbrace{\text{TVI de } T \text{ par rapport à } t}_{\dfrac{dT}{dt}} \quad \underbrace{\propto}_{= k\times} \quad \underbrace{\text{différence de températures}}_{(T_a - T)},$$

autrement dit : $\frac{dT}{dt} = k(T_a - T)$. Une équation que vous connaissez bien. La constante $k$ mesure la perméabilité du corps à la chaleur et est donc reliée à sa capacité isolante.

---

**N.B.** Dans plusieurs ouvrages de physique, on utilise la notation de Newton : $\dot{Q}$, $\ddot{Q}$, ... pour désigner les dérivées $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{d^2Q}{dt^2}$, ... d'une quantité $Q$ par rapport au *temps*.

**Exemple 3.9 (Équation de mouvement avec résistance)**

On suppose parfois que la force de résistance de l'air exercée sur un corps en mouvement est proportionnelle à sa vitesse.

Un corps de 10 kg tombe verticalement d'une certaine hauteur. Si la constante de proportionnalité de la résistance est $k = 19,6$ kg/s, quelle est sa vitesse terminale (vitesse vers laquelle il tend au bout d'un temps suffisamment long).

**Solution.** Soit $v$ la vitesse du corps au temps $t$. Son accélération est donnée par $\dot{v}$ (notation de Newton). Les forces qui agissent sur le corps sont :

a. la gravité : $-10\,\mathrm{kg} \times g = -98\,\mathrm{kg\,m/s^2}$ et

b. la résistance : $-k\,v = -19,6\,v$ (proportionnelle à la vitesse et s'y opposant).

D'après $F = ma$, l'équation du mouvement est

$$10\,\dot{v} = -98 - (19,6)\,v\,.$$

La solution générale de l'équation différentielle est $v = -5 + Ke^{-(1,96)\,t}$. Même si on ne connaît pas la vitesse initiale (qui déterminerait $K$), on peut trouver la vitesse terminale :

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to\infty} -5 + Ke^{-(1,96)\,t} = -5\,\mathrm{m/s}\,.$$

---

**Exemple 3.10 (Équilibre de forces)**

Voici un classique ! Un câble de densité constante $\rho$ est suspendu entre deux points. Quelle forme prend le câble ?

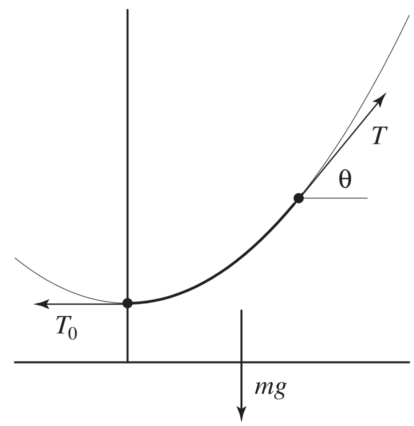
**Solution.** Plaçons le câble dans un système d'axes de sorte que son point le plus bas $A$ ait une abscisse nulle. Les forces qui agissent sur la portion du câble entre ce point et un point $P = (x, y)$ sont :

a. La tension horizontale $T_0$ exercée en $A$. Cette tension est constante.

b. La tension $T$ exercée en $P$. Cette tension dépend de $(x, y)$, et s'exerce tangenciellement à la courbe. Si on note $\theta$ l'angle entre la tangente et l'horizontale, la composante horizontale de cette tension sera $T\cos\theta$ et la composante verticale : $T\sin\theta$.

c. La gravité, exercée vers le bas, égale à $g$ fois la masse de la portion du câble entre $A$ et $P$. Celle-ci est la densité ($\rho$) fois la longueur de cette portion du câble. La force de gravité vaut donc

$$g\rho\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$




**Rappel :** la longueur d'une courbe décrite par un point variable $(x, y)$ entre deux points d'abscisses $a$ et $b$ est

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

Ces forces sont en équilibre statique. Considérant les composantes horizontales et verticales de celles-ci, on obtient :

$$T_0 = T\cos\theta \quad \text{et} \quad g\rho\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = T\sin\theta\,.$$

En divisant la seconde équation par la première, on a :

$$\frac{g\rho}{T_0}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \tan\theta = y'\,,$$

d'où, en dérivant (pour éliminer l'intégrale) :

$$\frac{g\rho}{T_0}\sqrt{1+y'^2} = y''\,.$$

Posons $a = g\rho/T_0$ (une constante) et $v = y'$. L'équation précédente devient : $a\sqrt{1+v^2} = v'$, qu'on peut résoudre : $\ln(v+\sqrt{1+v^2}) = ax + C$. Comme la pente $y' = v$ est nulle quand $x = 0$, on se rend compte que $C = 0$. Ainsi, $\ln(v+\sqrt{1+v^2}) = ax$. Résoudre pour $v$ nous donne $y' = v = (e^{ax} - e^{-ax})/2$. Une dernière intégration conduit à

$$y = (e^{ax} + e^{-ax})/(2a) + K = 1/a\,\cosh(ax) + K\,.$$

**Remarque.** On définit souvent les fonctions

$$\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

appelées respectivement “sinus hyperbolique” et “cosinus hyperbolique”. On vérifie facilement que

$$\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$$

qui est liée à l'équation de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ tout comme $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ l'est à l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On peut définir aussi tanh, coth, ...

Pouvez-vous trouver d'autres analogies entre les fonctions hyperboliques et les fonctions trigonométriques ?

### 3.2.3 Méthode des différentielles

Cette méthode décrit comment varient certaines quantités dans un intervalle de temps $[t, t + dt]$ (où on considère $dt$ comme étant très court). On l'utilise très souvent dans de nombreux domaines.

**Exemple 3.11** Une cuve contient initialement un mélange uniforme de 1 kg de sel dans 10 litres d'eau. Un robinet déverse 0,5 L d'eau à la minute dans la cuve. Un autre prélève 0,5 L du mélange à la minute. (Le mélange est maintenu uniforme par un vigoureux brassage.) Quelle est la quantité de sel restant dans la cuve au bout de deux heures ?

**Solution.** Soit $S(t)$ la quantité (en kg) de sel contenue dans la cuve au temps $t$ (en minutes). Comme le volume du mélange est constant à 10 L, la concentration de sel (au temps $t$) est $S(t)/10$ (kg/L).

Pendant un très court instant $dt$, la cuve perd $0,5\,dt$ (L) d'eau salée à la concentration $S/10$. La quantité de sel a donc varié de

$$dS = -(S/10)(0,5\,dt) = -S/20\,dt\,.$$

C'est notre équation différentielle (une séparable en plus !).

Sa solution générale est : $S = Ce^{-t/20}$. Comme $S(0) = 1$ kg, on trouve $C = 1$, d'où $S = e^{-t/20}$ kg. Au bout de $t = 120$ min., il restera $S(120) = e^{-6} \approx 0,00248\,\text{kg} = 2,48$ g de sel.

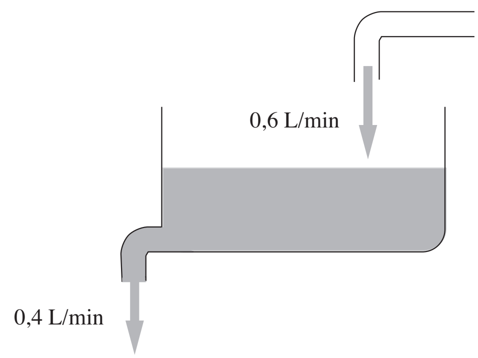
Mais qu'arrive-t-il si les deux robinets n'ont pas le même débit ?

**Exemple 3.12** Une cuve contient initialement un mélange uniforme de 1 kg de sel dans 10 litres d'eau. Un robinet déverse 0,6 L d'eau à la minute mais un autre prélève 0,4 L du mélange. (Le mélange est maintenu uniforme.) Quelle est la quantité de sel dans la cuve au bout de 2 heures ?

**Solution.** Cette fois, le volume de mélange varie ; on devra en tenir compte. Comme plus haut, soit $S(t)$ la quantité (en kg) de sel contenue dans la cuve au temps $t$ (en minutes). Le volume $V$ du mélange (en litres) est $V = 10 + 0,2\,t$. La concentration de sel est alors : $S/V = S/(10 + 0,2\,t)$.

Pendant un très court instant $dt$, la cuve perd $0,4\,dt$ (L) de mélange. La quantité de sel a varié de

$$dS = -\frac{S}{10 + 0,2\,t} \times 0,4\,dt = -\frac{2S}{50 + t}\,dt\,.$$




Nous avons notre équation différentielle (encore une séparable !).

Elle se résout facilement : $S(t) = C\,(50+t)^{-2}$. Comme $S(0) = 1$ kg, on peut déterminer $C = 2500$, d'où :

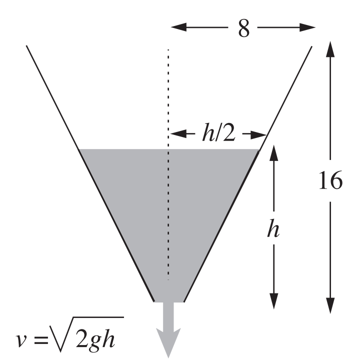
$$S(t) = \frac{2500}{(50+t)^2}\,.$$

Au bout de $t = 120$ min., il restera $S(120) = 86,5$ g de sel.

---

Vous trouverez de nombreuses variantes de ces problèmes dans les exercices.

**Exemple 3.13** Un entonnoir conique de 16 cm de haut et de diamètre maximal 16 cm est rempli de sirop. Celui-ci s'échappe de l'ouverture avec une vitesse $v = \sqrt{2gh}$ où $h$ est la hauteur de la surface du sirop par rapport à l'ouverture (comme si chaque goutte tombait en chute libre de la hauteur $h$ : c'est la loi de Torricelli). En combien de temps se vide-t-il, sachant qu'au bout de 20 secondes, la hauteur du sirop n'est plus que de 9 cm ?




---

**Solution.** Soit $h$ la hauteur de la surface du sirop au temps $t$. Le rayon de cette surface est $r = h/2$. Le volume de sirop présent à ce moment est $V = \pi r^2 h/3 = \pi h^3/12$.

Pendant un instant $dt$, il s'est échappé un volume de sirop $dV$ proportionnel à $v\,dt = \sqrt{2gh}\,dt$. On a ainsi

$$dV = K\,\sqrt{2gh}\,dt \tag{3.1}$$

(la constante de proportionnalité dépend de la grandeur de l'ouverture, de la viscosité du sirop, ...).

D'autre part, la différentielle de la relation $V = \pi h^3/12$ est

$$dV = \frac{\pi}{4}\,h^2\,dh\,. \tag{3.2}$$

En combinant les deux équations 3.1 et 3.2, on élimine $dV$ :

$$\frac{\pi}{4}\,h^2\,dh = K\sqrt{2gh}\,dt\,,$$

qui se simplifie pour donner :

$$h^{3/2}\,dh = A\,dt$$

(où $A = 4K\sqrt{2g}/\pi$ est une constante). La solution se trouve facilement :

$$h^{5/2} = 5A/2\,t + B\,.$$

Comme $h = 16$ initialement et comme $h = 9$ au bout de $t = 20$, on parvient à déterminer les constantes $A$ et $B$, conduisant finalement à

$$h^{5/2} = 1024 - (39,05)t\,.$$

La hauteur est nulle ($h = 0$) au bout de $t = 1024/39,05 \approx 26,2$ secondes.

### 3.2.4 Quelques astuces

Pour finir, voici quelques astuces utiles pour ramener certaines équations différentielles d'ordre 2 à des équations d'ordre 1. Ceci permet d'enrichir les problèmes et d'étudier parfois des situations plus réalistes.

**Exemple 3.14** Reprenons l'exemple 3.9 du corps tombant sous l'action de la gravité, ralenti par la force de résistance de l'air.

Si on décrit le mouvement du corps à l'aide de sa position $y$ (hauteur) au cours du temps au lieu de sa vitesse, on obtiendrait l'équation différentielle

$$\ddot{y} = (9,8) - (1,96)\,\dot{y}\,,$$

puisque $\dot{y}$ est sa vitesse et $\ddot{y}$ son accélération.

En posant $\dot{y} = v$, on se ramènerait à l'équation qu'on avait alors : $\dot{v} = (9,8) - (1,96)\,v$.

Le même truc s'applique en général, à une équation différentielle du second ordre $f(x, y', y'') = 0$, dans laquelle $y$ n'apparaît pas. On la ramène à l'ordre 1 en posant $v = y'$. On a alors : $f(x, v, v') = 0$. Nous avons utilisé cette astuce aussi dans l'exemple 3.10 du câble suspendu.

Ainsi pour résoudre $x\,y'' = -y'$, on aurait (avec $v = y'$) $x\,v' = -v$. Après séparation des variables et intégration, on a : $v = C/x$. Donc $y' = C/x$, qui conduit à $y = B + C \ln|x|$.

---

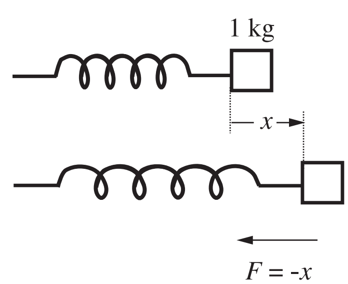
Voici un autre truc utile pour résoudre une équation de forme $y'' = f(y)$. Des équations de cette forme forment la base de l'étude du mouvement harmonique.

**Exemple 3.15** Un ressort a une force de rappel proportionnelle ($k = 1$, disons) à son étirement (loi de Hooke). Décrire le mouvement d'une masse de 1 kg reliée à ce ressort et se déplaçant horizontalement, (en l'absence d'autres forces) si on suppose qu'à $t = 0$ on a $x = 0$ et $\dot{x} = 1$.

---

**Solution.** Soit $x$ sa position (au cours du temps $t$) sur l'axe horizontal (on peut considérer $x$ comme l'étirement du ressort). D'après $F = ma$, on a : $\ddot{x} = -x$. On peut ramener cette équation à l'ordre 1 de la façon suivante. Commencer par multiplier chaque membre par $\dot{x}$, pour obtenir $\dot{x}\ddot{x} = -x\dot{x}$. Comme $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ et comme $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, l'équation peut s'écrire :

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} = -x\dot{x} = -x\frac{dx}{dt}\,,$$




ou (en multipliant par $dt$) : $\dot{x}\,d\dot{x} = -x\,dx$. On peut alors intégrer de chaque côté : $\dot{x}^2 = -x^2 + C$, une équation du premier ordre ! Les conditions initiales déterminent $C = 1$. L'équation $\dot{x}^2 = 1 - x^2$ produit, en passant aux différentielles :

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = dt\,,$$

qu'on peut intégrer pour obtenir : $\arcsin(x) = t + A$. Comme $x = 0$ quand $t = 0$, on trouve $A = 0$. Finalement, en isolant $x$, on trouve la solution finale : $x = \sin t$. La solution correspond bien à l'intuition, elle décrit un mouvement oscillant.

# Exercices

**3.17** Trouvez l'équation différentielle de chacune des familles de courbes suivantes :

a. des hyperboles de forme $xy = C$.

b. des cercles tangents à l'axe $OX$ en $(0, 0)$.

c. des droites passant par le point $(1, 2)$.

d. des cercles passant par $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

e. des paraboles d'axe vertical passant par $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

f. (*) des droites tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 1$.

**3.18** Trouvez les familles de courbes orthogonales à celles du problème précédent. (N.B. : Laissez tomber le f.)

**3.19** Trouvez les courbes définies par les conditions suivante :

a. La pente de la tangente en chaque point est le double de l'ordonnée du point de tangence.

b. La normale en tout point $(x, y)$ de la courbe passe par l'origine.

c. Le segment de la normale au point $(x, y)$ compris entre ce point et l'axe des $x$ est coupé en son milieu par l'axe des $y$.

d. La courbe passe par le point $(2, 3)$. Sa normale en tout point $(x, y)$ et la droite joignant l'origine et ce point forment un triangle isocèle en $(x, y)$ dont la base est l'axe des $x$.

e. Le segment, compris entre les deux axes, de la tangente en un point de la courbe est coupé en deux parties égales par ce point.

f. Le segment, compris entre les deux axes, de la normale en un point de la courbe est coupé en deux parties égales par ce point.

g. La normale issue d'un point $P$ de la courbe rencontre l'axe horizontal en un point $Q$. La projection du segment $PQ$ sur cet axe a toujours la longueur 1.

h. La tangente issue d'un point $P$ de la courbe rencontre l'axe horizontal en un point $Q$ situé à droite de $P$. La projection du segment $PQ$ sur cet axe est toujours de longueur 1.

i. En tout point $P$ de la courbe, le rectangle défini par les droites issues de $P$, parallèles aux axes et ces mêmes axes est coupé par la courbe en deux aires. L'aire supérieure est le triple de l'aire inférieure.

**3.20** Vérifiez que la famille de courbes solution de l'exemple 3.6 (la tractrice) est orthogonale à la famille de cercles de rayon 1 centrés sur l'axe des $y$.

**3.21** La quantité de lumière absorbée par une mince couche d'eau est proportionnelle à l'épaisseur de la couche et à la quantité de lumière incidente. Cette quantité diminue de moitié par 3 mètres de fond. Quel est le pourcentage de lumière qui parvient à 30 mètres de profondeur ?

**3.22** En tout temps, le radium se décompose proportionnellement à la quantité (de radium) présente à ce moment. Si la moitié de la quantité initiale disparaît en 1600 ans, quel pourcentage se désintègre en 100 ans ?

**3.23** Une balle de neige fond à un taux proportionnel à sa surface. Au départ, elle a un diamètre de 8 cm. Au bout de 2 heures, il n'est plus que de 4 cm. Au bout de combien de temps disparaît-elle ?

**3.24** Le taux de refroidissement d'un corps est proportionnel à la différence des températures du corps et du milieu ambiant (loi du refroidissement de Newton). La température de l'air étant de 20°C, un cafetière se refroidit de 100°C à 60°C en 20 minutes. Exprimez la température du café en fonction du temps.

**3.25** Refaire le problème précédent dans les conditions suivantes. Quand le café est prêt ($T = 100$°C), on sort dehors pour la tournée générale. Cette fois, le café se rend à 60°C en 12 minutes. Quelle est la température extérieure ?

**3.26** En tout temps, le taux de variation de la taille d'une certaine population est proportionnel à la taille de cette population, et à l'écart entre cette taille et une taille limite $L$. On observe que la taille de la population est 300 Mhab en 1950, 600 Mhab en 1975, et 1000 Mhab en 2000.

a. Exprimez la taille $P$ de la population en fonction du temps $t$ écoulé depuis 1950.

b. Quelle est la taille $L$ de la population limite ?

c. En quelle année $dP/dt$ commence-t-il à fléchir ? Quelle est alors la taille de la population ?

**3.27** On combine deux substances $A$ et $B$ pour en former une troisième $C$. On sait que que 2 g de $A$ et 3 g de $B$ forment 5 g de $C$. La réaction chimique est de second ordre, de sorte que le taux de formation de $C$ est proportionnel aux quantités de $A$ et de $B$ non encore transformées. La constante de proportionnalité est 0,05/g·s. La quantité initiale de $C$ est nulle.

a. S'il y a initialement 40 g de $A$ et 60 g de $B$, trouvez la quantité de $C$ en fonction du temps.

b. S'il y a initialement 50 g de $A$ et 50 g de $B$, trouvez la quantité de $C$ en fonction du temps.

c. Trouvez le temps pris pour que la moitié de la quantité-limite de $C$ se forme.

**3.28** Un petit bateau, de masse totale 150 kg, est propulsé à partir du repos avec une force de 70 newtons. La résistance du milieu (en newton) est le double de la vitesse en m/s. Quelle est la vitesse 1 seconde après le départ.

**3.29** Une masse de 30 kg, initialement au repos, glisse sur une table. Elle est soumise à une traction (horizontale) de $120e^{-t}$ N. Si la force de friction vaut (en newtons) 60 fois la vitesse, trouvez la vitesse en fonction du temps.

**3.30** On remorque un traîneau, de masse totale 70 kg. La résistance de la glace combinée avec celle de l'air vaut (en newtons) 35 fois la vitesse en m/s. Quelle force de traction (constante) doit-on exercer sur le traîneau pour obtenir une vitesse-limite de 18 km/h.

**3.31** Un colis, jeté d'un avion tombe à la verticale en chute libre. Ayant atteint la vitesse de 55 m/s, son parachute s'ouvre. La force de résistance de l'air est alors $Pv^2/25$, où $P$ est le poids total du colis et du parachute. Décrire la vitesse en fonction du temps (après l'ouverture du parachute). Quelle est la vitesse-limite du colis ?

**3.32** Un câble de masse négligeable suspendu entre deux mats à distance $L$ l'un de l'autre, supporte un pont de masse $M$ de sorte que la charge est répartie uniformément dans la direction horizontale. Quelle forme prend le câble ?

**3.33** Une cuve contient initialement 100 litres d'eau dans laquelle sont dissous 60 grammes de sel. De l'eau pure coule dans le réservoir à raison de 2 litres par minute. (On maintient la solution uniforme par brassage.) La solution s'écoule en quantité égale. Combien reste-t-il de sel au bout d'une heure ?

**3.34** Une cuve contient initialement 100 litres d'eau dans laquelle sont dissous 20 kg de sel. On y verse 3 litres par minute d'une solution de concentration en sel de 0,1 kg par litre. (On maintient la solution uniforme par brassage.) On retire 3 litres par minute du réservoir, de sorte que le volume reste constant. Trouvez la masse de sel dans le réservoir au temps $t$.

**3.35** Jouez-vous au badminton ? Les trajectoires du "moineau" sont surprenantes ! Quand vous frappez le volant (sans trop d'"effet"), il voyage dans un plan vertical (disons $XOY$). On peut étudier sa vitesse suivant la composante horizontale $u$ et la composante verticale $v$, chacune de ces variables dépendant du temps $t$. En supposant que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse,

a. montrez que les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$u' + Ku = 0 \qquad \text{et} \qquad v' + Kv = -g,$$

(où $g = 9,8$ m/s$^2$ et $K$ est une constante liée à la résistance). Trouvez la solution générale de chacune.

b. Supposons que la vitesse initiale du volant dans la direction horizontale est de 8 m/s et qu'elle baisse à 2,94 m/s après 1/2 s. Trouvez $u$ et $K$. Si la vitesse initiale du volant dans la direction verticale est de 3 m/s, trouvez $v$.

c. Intégrez ces deux fonctions ($u = x'$ et $v = y'$) pour trouver $x$ et $y$ en fonction de $t$. La position initiale du volant est $(x, y) = (0, 2)$ m.

**3.36** Une cuve contient initialement 100 litres d'eau dans laquelle sont dissous 20 kg de sel. On y verse 4 litres d'eau pure par minute. (On maintient la solution uniforme par brassage.) On retire 5 litres par minute du réservoir. Trouvez la masse de sel dans le réservoir au temps $t$.

**3.37** Une cuve contient initialement 100 litres d'eau dans laquelle sont dissous 5 kg de sel. On y fait couler de l'eau contenant 0,15 kg de sel par litre, à raison de 1 litre par minute. (On maintient la solution uniforme par brassage.) La solution s'écoule hors du réservoir à raison de 2 litres par minute. Quelle est la quantité de sel dans le réservoir après 1 heure ?

**3.38** Dans la réaction $2\,\mathrm{N_2\,O_5} \longrightarrow 4\,\mathrm{N\,O_2} + \mathrm{O_2}$, la concentration de $\mathrm{N_2\,O_5}$ suit une loi de vitesse du premier ordre : elle varie proportionnellement à la concentration présente. Au début de l'expérience, la concentration de $\mathrm{N_2\,O_5}$ est de $14,50$ mol/m$^3$. Au bout d'une heure, elle n'est plus que de 2,42 mol/m$^3$. Quelle est la vitesse de réaction au début de l'expérience ? Quelle est la constante ($k$) de réaction ? Quelle est la concentration de $\mathrm{N_2\,O_5}$ au bout de 2 heures ? Quel est le temps de demi-réaction (temps pris pour que la concentration de $\mathrm{N_2\,O_5}$ diminue de moitié) ?

**3.39** Un circuit électrique est composé d'une résistance de 250 Ω, d'un condensateur de capacité 800 $\mu$F et d'une source de tension de 50 volts montés en série. Trouvez la charge du condensateur au temps $t$ si la charge initiale est nulle.

**3.40** On remplit d'eau un réservoir conique de hauteur 2 mètres et de rayon maximal de 1 mètre. Après deux heures, une partie de l'eau s'est évaporée, de sorte que le niveau d'eau dans le réservoir n'est plus que de 1 mètre. Trouvez la fonction décrivant le niveau d'eau dans le réservoir en fonction du temps si

a. le taux d'évaporation est proportionnel à l'aire de la surface exposée à l'air ;

b. le taux d'évaporation est constant.

**3.41** On remplit d'eau un réservoir cylindrique vertical de 36 cm de rayon et de 100 cm de hauteur. Il se vide par un trou circulaire de 2 cm de rayon situé à sa partie inférieure. La colonne d'eau sort à la vitesse de $4,5\sqrt{h}$ cm/s, où $h$ est la hauteur de l'eau restant dans le réservoir. En combien de temps le réservoir se vide-t-il ?

**3.42** *Ah ! Comme la neige a neigé...* Un bon matin, il commence à neiger, et la neige tombe toute la journée à un taux constant. À midi, un chasse-neige commence à ramasser la neige à un taux constant (en volume par heure). À 13h, le chasse-neige a parcouru 2 km, et 1 km de plus à 14h. À quelle heure a-t-il commencé à neiger ?

**3.43** Une masse de 100 g se déplace sans friction sur l'axe horizontal. Un ressort attaché à l'origine exerce sur la masse une force proportionnelle à la distance à l'origine (la constante de proportionnalité est 0,4 N/m).

a. Trouvez l'équation du mouvement si la masse est située initialement à $+3$ m, avec une vitesse initiale nulle.

b. Trouvez l'équation du mouvement si la masse est située initialement à $+3$ m, avec une vitesse initiale de $-8$ m/s.

**3.44** On lance vers le haut une masse de 1 kg avec une vitesse initiale de 1 m/s. Quelle est la hauteur maximale atteinte ? (On supposera que la résistance de l'air (en newtons) est proportionnelle à la vitesse (en m/s) avec constante de proportionnalité égale à 9,8 Ns/m.) Combien de temps prend le retour à la position initiale ?

**3.45** La force de gravité sur une masse $m$ à distance $s$ du centre de la terre est proportionnelle à $1/s^2$.

a. Un corps situé à 5 rayons terrestres ($R = 6375$ km) part du repos. À quelle vitesse frappe-t-il la terre ?

b. Même question si le corps vient de l'infini ? (Autrement dit, quelle doit être la vitesse initiale d'un corps pour l'envoyer à l'infini (il échapperait alors à l'attraction terrestre : c'est sa *vitesse de libération terrestre* )) ? (Négliger toutes les autres forces.)

**3.46** Quelle est la vitesse de libération lunaire ? Le rayon lunaire est d'environ 1700 km, l'accélération gravitationnelle à sa surface d'environ 1,6 m/s$^2$.

**3.47** Une masse de 3 kg est suspendue à un ressort vertical dont la constante de rappel vaut 300 N/m. (L'autre extrémité du ressort est fixée.) On abaisse la masse de 60 mm au-dessous de sa position d'équilibre, et on la relâche.

Trouvez l'équation du mouvement si la résistance du milieu est nulle.

**3.48** La constante de rappel d'un ressort vertical est telle qu'il s'allonge de 0,25 m sous l'effet d'une masse de 9 kg... On y attache une masse de 7,2 kg qui est remontée de 0,10 m et envoyée vers le bas avec une vitesse de 0,35 m/s. Si la résistance du milieu est négligeable, trouvez l'étirement (ou compression) du ressort au temps $t$.

**3.49** Une bouée cylindrique de 0,5 m de rayon flotte sur un lac tranquille... Quand on l'enfonce, elle subit une poussée (d'Archimède) égale au poids du volume d'eau déplacée. Quand on la relâche elle se met à osciller verticalement.

a. Quelle est l'équation différentielle qui gouverne son mouvement ? (Négliger les forces de résistance.) Résoudre.

b. Si on connaît sa période, peut-on en déduire sa masse ?

c. Si la période d'oscillation est de 2 secondes. Quelle est la masse de la bouée ?

**3.50** Plusieurs produits pharmaceutiques (entre autres, la pénicilline) s'éliminent du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité rémanente $y$ dans le sang.

a. Supposons qu'on injecte $y_0$ du produit à un patient, montrez que la quantité rémanente au temps $t$ sera $y(t) = y_0 e^{-kt}$ pour une certaine constante $k > 0$.

b. Si on injecte le produit par un soluté à raison de $I$ mg/min, trouvez la quantité rémanente au temps $t$ si $y(0) = 0$.

c. Si la demi-vie du produit est deux heures, quel est le taux d'injection par soluté qui maintiendra, à long terme, la présence de 100 mg de produit dans le sang ?

**3.51** Une certaine courbe se situe au dessus de l'axe horizontal. La longueur d'arc entre n'importe quels deux points de celle-ci est proportionnelle à l'aire sous cet arc. De quelle courbe s'agit-il ?

**3.52** L'aire de la surface comprise entre les axes de coordonnées, une certaine courbe et n'importe quelle droite verticale, est égale au cube de l'ordonnée du point de rencontre de la droite avec la courbe.

**3.53** *Poursuite*. La souris en $(0,0)$ vient d'apercevoir le chat en $(1,0)$. Elle court à vitesse $v$ en direction de sa cachette en $(0,h)$. En même temps, le chat la poursuit, toujours en direction de la souris, à vitesse $V$. La souris s'en sort-elle ?

**3.54** On perce un trou à travers une sphère, joignant le sommet à un autre point de la sphère. On laisse glisser un objet (sans frottement ni rotation) à travers le trou. Montrez que le temps pris par l'objet pour sortir de la sphère est indépendant du point de sortie.

**3.55** On parle de construire un métro Montréal-Paris. Il suffirait de creuser un tunnel à travers la Terre reliant ces deux villes en ligne droite. Au départ de Montréal, on laisserait rouler le wagon sous l'action de son propre poids. Avec la technologie du futur, le frottement et la résistance de l'air seraient négligeables, de sorte que le wagon roulerait ainsi jusqu'à Paris ; une solution très économe en énergie !

a. Quelle est l'ED gouvernant le voyage du wagon. (L'accélération gravitationnelle subie par un corps à l'intérieur de la Terre est proportionnelle à la distance de celui-ci au centre de la Terre.)

b. En admettant que le rayon terrestre soit d'environ $R = 6\,350$ km, montrez que le voyage durerait environ 42 min. Montrez aussi que le voyage entre n'importe quels deux points dans des conditions similaires durerait aussi 42 min.

c. Dans le voyage aux antipodes par métro, quelle serait la vitesse maximale du wagon ?

**3.56** Quatre fourmis partent chacune d'un coin d'une table carrée $ABCD$. La fourmi $A$ se dirige toujours vers la fourmi $B$ qui se dirige vers la fourmi $C$, etc. Les fourmis se déplacent toutes à la même vitesse. Décrire leur trajectoire.

# 4

# Réponses ou solutions des exercices

## Section 1

1.1 a. $-1+0+3/5+8/10+\cdots$, b. $3/4+1/9+3/16+1/25+\cdots$,
c. $1-1/2+1/24-1/720+\cdots$, d. $1/2-4/6+16/12-64/20+\cdots$,
e. $1+\frac{1+a}{2+a}+\frac{2+a}{4+a}+\frac{3+a}{6+a}+\cdots$.

1.2 (N.B. D'autres réponses sont possibles, par translation des indices.)
a. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i+1}{2i+2}$, b. $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)^2}{2^i}$, c. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{3k+1}$, d. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)\,!}{(k+2)^2-1}$.

1.3 a. $s_n=2^{n+1}-1$, b. $s_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, c. $s_n=\ln(n+1)$, d. $s_n=(n+1)^2$,
e. $s_n=1-1/(2n+1)=\frac{2n}{2n+1}$, f. $s_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{3}{2(n+2)}$, g. $s_n=1-\frac{1}{(n+1)\,!}$,
h. $s_n=1-e^{-n}$.

1.4 a. La série converge vers $\lim_{n\to\infty}s_n=1$. On a $a_n=s_n-s_{n-1}=2/(n^2+n)$.
b. La série converge vers 5. On a $a_n=(2n-3)/3^n$.

1.5 (Test de divergence) Séries assurément divergentes : (a), (b), (e), (g) et (i). Le test ne permet pas de conclure pour les autres (c, d, f, h).

1.6 a. Géométrique de raison $r=1/10$. Converge. Premier terme : $\frac{1}{(\sqrt{10})^3}$. La somme est $\frac{1}{9\sqrt{10}}$.
b. Géométrique avec $r=-3/7$. Premier terme : $-3\times 7^{-4}$. Converge vers $\frac{-3}{7^3\cdot 10}$.
c. Géométrique de raison $r=-25/12$. Diverge.
d. Géométrique de raison $r=-2/\pi$ (n.b. $\cos(k\pi)=(-1)^k$). Converge vers $\frac{\pi}{2+\pi}$.
e. Pas géométrique.
f. Géométrique avec $r=1/10$. Converge. $1^{\text{ier}}$ terme : 3. La somme est $10/3$.
g. Géométrique avec $r=-1/4$. Converge. $1^{\text{ier}}$ terme : 1. La somme est $4/5$.
h. Pas géométrique.

1.7 a. La raison est $r=2>1$.
b. Puisque la raison de la première série est $r$ (avec $0<r<1$), la raison de la deuxième $(1/r)$ vérifie $1/r>1$. La deuxième série diverge.

1.8 a. $-5/2$. b. $7/2$. c. $15/2$. d. $2e^2 + 3e - 3$.

1.9 a. Diverge ($a_k \to 1/2 \neq 0$). b. Converge (Rapport : $R = 1/e < 1$).
c. Diverge (Intégrale). d. Diverge (Rapport : $R = \infty > 1$).
e. Converge (Rapport : $R = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$). f. Diverge ($a_k \to 1/7 \neq 0$).
g. Diverge (Intégrale). h. Converge (Intégrale). i. Converge (Intégrale).
j. Converge (Rapport : $R = 1/4 < 1$). k. Converge ($R = \sqrt{5}/4 < 1$).
l. Converge (Rapport : $R = 1/e < 1$). m. Converge (Rapport : $R = 0 < 1$).
n. Diverge ($a_k \to 1$). o. Diverge ($a_k \to 1$). p. Converge (Intégrale).
q. Converge (Somme de deux convergentes). r. Converge ($R = 1/2 < 1$).

1.10 Seules (c), (i) et (j) ne sont pas alternées. (Attention : $(-1)^n \cos(n\pi) = 1$ ; les signes n'alternent pas). En fait, (i) est alternée, mais seulement pour $x \geq 0$. Parmi les autres, (a), (d) et (f) ne convergent pas (les termes ne tendent pas vers 0). Pour (h), les signes n'alternent pas, à strictement parler $(+ - - + + - - + + \cdots)$. (i) converge seulement pour $-1 < x \leq 1$.

1.11 (a) et (b) $0,7986111\ldots \pm 0,04$. c. Au moins 99 termes !

1.12 (a) et (b) $0,5402778\ldots \pm 0,0000248\ldots$. (c) 4 termes suffisent ($n = 0, 1, 2, 3$).

1.13 a. Pas une série entière (une série dite *de* LAMBERT).
b. Série entière : converge pour $x \in [1, 3[$.
c. Série entière : converge pour $x \in ]2, 6]$.
d. Pas entière : $n^{-x}$ n'est pas une puissance de $x$ (ni de $Ax + B$).
e. Série entière : converge (vers 1) pour $x = -2$ seulement.
f. Pas une série entière : $\ln x$ n'est pas une puissance de $x$ (ni de $Ax + B$).
g. Pas une série entière : exposant négatif en $n = -1$.
h. Entière : converge pour $x \in [2, 4]$. i. Entière : converge pour $x \in ]-1, 3[$.
j. Entière : converge pour $x \in \mathbb{R}$.
k. Entière : converge pour $x \in ]-3, 5[$. (En fait, $[-3, 5]$.)
l. Entière : converge pour $x \in \mathbb{R}$.
m. Entière (géométrique) : converge pour $x \in ]0, 18[$.
n. Entière : converge pour $x \in ]-3, 1[$. o. Pas entière.
p. Entière, converge pour $|x| < 1$. q. Entière, converge sur $]-1, 1]$.
r. Entière, converge sur $[-3, -1]$. s. Entière, converge sur $[4, 8]$.
t. Entière, converge sur $[-3, 3]$.
u. Entière. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, converge sur $\mathbb{R}$, sinon, sur $]-1, 1[$.

1.14 La série est centrée en 0 et son rayon de convergence est entre 3 et 5 (inclusivement). On a donc : a. Converge. b. On ne peut rien dire. c. Converge. d. Diverge. e. Converge pour $x \in [-3, 3[$, diverge pour $x \in ]-\infty, -5[\cup[5, \infty[$, aucune information pour $x \in [-5, -3[\cup[3, 5[$.

1.15 a. La série s'écrit : $x(1 + x) + x^4(1 + x) + x^7(1 + x) + \cdots$. On factorise : $x(1 + x)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) = x(1 + x)/(1 - x^3)$. Autre façon : la série est $(1 + x + x^2 + \cdots) - (1 + x^3 + x^6 + \cdots) = 1/(1 - x) - 1/(1 - x^3) = x(1 + x)/(1 - x^3)$.
b. $x(1 - x)/(1 + x^3)$. c. $(1 + 2x + 3x^2)/(1 - x^3)$.

1.17 a. $e^{x-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(x-1)^k}{k\,!}$, b. $\sqrt{e^{3x}} = e^{3x/2} = \sum_{k\geq 0} \frac{3^k x^k}{2^k\,k\,!}$, c. $x\,e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{k+1}}{k\,!} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{(k-1)\,!}$, d. $\frac{e^x-1}{x} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^{k-1}}{k\,!} = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(k+1)\,!}$, e. $e^{-x^2} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k\,!}$, f. $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k\,!\,(2k+1)}$.

1.18 a. $e^{-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k\,!} \approx 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \frac{1}{4!} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{24} = 0,3333 \pm 0,0417$,

b. Avec $e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!} \pm \frac{1}{(n+1)\,!}$, il faut que $\frac{1}{(n+1)\,!} \leq 10^{-5}$. Prendre $n+1 = 9$ termes. c. $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k\,!\,(2k+1)} \approx 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} \pm \frac{1}{4!9} = 0,74286 \pm 0,00463$,

d. Il faut que $\frac{1}{(n+1)\,!\,(2n+3)} \leq 10^{-5}$. Prendre $n+1 = 8$ termes.

1.21 a. La fonction est :

$$1/(1-2x) - 1/(1-x) = \sum_{k\geq 0} 2^k\,x^k - \sum_{k\geq 0} x^k = \sum_{k\geq 0} (2^k - 1)\,x^k\,.$$

b. La fonction est : $\frac{1}{5\,(1-2x)} - \frac{1}{5\,(1+3x)} = \sum_{k\geq 0} \frac{2^k + (-1)^{k-1} 3^k}{5}\,x^k$.

c. La fonction est : $-\frac{1/4}{1-x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} - \frac{1/4}{1+x} = \frac{1/2}{(1-x)^2} - \frac{1/2}{1-x^2} = \sum_{k\geq 0} c_k\,x^k$ où $c_k = (k+1)/2$ si $k$ est impair et $c_k = k/2$ si $k$ est pair.

1.22 a. On commence par $k-1$ lancers infructueux (résultats 1 à 5), chacun à probabilité $5/6$, suivi d'un 6 à probabilité $1/6$.

b. On trouve $P(x) = \sum_{k\geq 1} p_k\,x^k = \sum_{k\geq 1} 5^{k-1}/6^k\,x^k = x/(6-5x)$. D'où $P(1) = 1$. C'était prévisible puisque $P(1) = \sum_{k\geq 1} p_k$ est la probabilité qu'un 6 apparaisse éventuellement.

c. $P'(1) = \sum_{k\geq 1} k\,p_k$ est bien l'espérance. On a $P(x) = 6/(6-5x)^2$, d'où $P'(1) = 6$.

1.23 a. La première série converge si $|x|\,\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, i.e. si

$$|x| < \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = r_a$$

(et similairement pour toute série). Le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geq 0} a_k\,b_k\,x^k$ sera donc $r = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k\,b_k|}{|a_{k+1}\,b_{k+1}|} = r_a\,r_b$.

b. Ceci ne fait que déplacer le centre et n'influence pas les rayons de convergence. On aura encore $r = r_a\,r_b$.

1.24 Voici les approximations quadratiques. Pour les linéaires, ôter le terme de second degré.

a. $1 - (x-1) + (x-1)^2$ b. Impossible. c. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - (x-\pi/4) - \frac{(x-\pi/4)^2}{2}\right)$. d. $x$
e. $x$ f. $\pi/6 + 2\sqrt{3}/3\,(x-1/2) + 2\sqrt{3}/9\,(x-1/2)^2$ g. $1 + x + x^2/2$ h. $3x - 6x^2$.

1.26 a. L'approximation $\arcsin x \approx x$ donne $\arcsin(0,4) \approx 0,40$.

b. L'approximation $\arcsin x \approx \pi/6 + 2\sqrt{3}/3\,(x-1/2)$ donne $\arcsin(0,4) \approx 0,408$.

c. L'approximation quadratique $\arcsin x \approx x$ donne $\arcsin(0,4) \approx 0,40$ alors que $\arcsin x \approx \pi/6 + 2\sqrt{3}/3\,(x-1/2) + 4\sqrt{3}/9\,(x-1/2)^2$ donne $\arcsin(0,4) \approx 0,4158$.

1.27 a. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n\,!}$. b. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{(x-2)^n}{n\,!}$. c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\,!}$. d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!\,n}$.

1.28 a. $\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$. b. i. $\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{2^{2k+1}\,x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$.
ii. $\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)\,!}$. iii. $\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!\,(2k+1)}$.

1.29 a. $1 + x/2 + 3x^2/8 + 5x^3/16$. b. $1 + t^2/2 + 3t^4/8 + 5t^6/16$.
c. $x + x^3/6 + 3x^5/40 + 5x^7/112$.

1.30 a. $1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(x-1)^k$. b. Impossible.
c. $1+x/2-x^2/8+x^3/16$. d. Impossible. e. $2+(x-2)/12-(x-2)^2/288$.
f. $\sqrt{2}/2\left(1-(x-\pi/4)-(x-\pi/4)^2/2+(x-\pi/4)^3/6\right)$. g. $x+x^3/3$.
h. $1+\alpha\,x+\alpha\,(\alpha-1)/2\,x^2+\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)/6\,x^3$.

1.31 a. $-14\,!$ et 0. b. $-2^{15}\,14\,!$ et 0. c. $f^{(15)}(0) = 0$ et $f^{(16)}(0) = 16\,!/8\,!$.
(Indication : se souvenir de la formule 1.19 et de la définition 1.7.)

1.32 a. $x^4 = 1 + 4\,(x-1) + 6\,(x-1)^2 + 4\,(x-1)^3 + (x-1)^4$. b. $x^4/(x-1)^5 = 1/(x-1)^5 + 4/(x-1)^4 + 6/(x-1)^3 + 4/(x-1)^2 + 1/(x-1)$.

c. Il s'agit du coefficient de $(x-2)^4$ dans le développement de $f(x) = (3-x)^7$ autour de 2, soit $f^{(4)}(2)/4\,! = 35$.

d. Il s'agit du coefficient de $(x-2)^4$ dans le développement de $f(x) = (3-4x+x^2)^3 = ((x-2)^2-1)^3$ autour de 2. Or $(u-1)^3 = -1+3\,u-3\,u^2+u^3$, d'où $((x-2)^2-1)^3 = -1+3\,(x-2)^2-3\,(x-2)^4+(x-2)^6$. Le coefficient cherché est $-3$.

1.33 a. $1 + x^4/2$. b. $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = 12$ (car $f^{(4)}(0)\,x^4/4\,! = x^4/2$). c. C'est une valeur critique car $f'(0) = 0$. Un min car $f(x) \approx 1 + x^4/2$. Or, les termes de degré supérieur à 4 sont négligeables quand $x \to 0$...

1.34 a. $h/(2L)$, b. $1 - L/h$.

1.35 On a $(1-x)^{-1/2} \approx 1+x/2$, par linéarisation autour de 0. Donc $E = m_0c^2(1-v^2/c^2)^{-1/2} \approx m_0c^2 + m_0v^2/2$, d'où $E - E_0 \approx m_0v^2/2$.

1.36 L'approximation quadratique autour de 0 donne $e^x \approx 1+x+x^2/2$. On a donc $y \approx a\left((1+x/a+x^2/(2\,a^2)) + (1-x/a+x^2/(2\,a^2))\right)/2 = a + x^2/(2\,a)$.

1.37 La linéarisation de $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$ autour de $x=0$ est $x$. On a alors (poser $x = L/h$)

$$U = K\,\ln\left|L/h+\sqrt{(L/h)^2+1}\right| \approx \frac{KL}{h}\,,$$

quand $h \to \infty$.

1.38 a. et b. Utiliser la loi des cosinus. Les deux distances sont les deux dénominateurs.

c. Remarquons que le potentiel s'écrit

$$U = \frac{Kq}{r}\,\left(f(a/r,\theta) - f(-a/r,\theta)\right)\,,$$

où $f(x,\theta) = (1 - 2x\cos\theta + x^2)^{-1/2}$. Or $a/r \to 0$ quand $r \to \infty$, ce qui suggère de trouver une approximation (linéaire ?) de la fonction $f(x,\theta)$ autour de $x = 0$ ($\theta$ étant fixe). Or

$$f(x,\theta) \approx 1 + x\,\cos\theta\,.$$

Ceci donne

$$U \approx \frac{Kq}{r}\left(\left(1 + \frac{a\cos\theta}{r}\right) - \left(1 - \frac{a\cos\theta}{r}\right)\right) = \frac{2Kq\,a\,\cos\theta}{r^2}$$

(pour $r$ assez grand). On utilise souvent cette approximation en physique et en génie électrique.

d. Cette fois, il faut développer $f(x,\theta)$ autour de $\theta = \pi/2$ ($x$ étant fixe). Comme

$$f(x,\theta) \approx \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,(\theta - \pi/2)\,,$$

on a, pour $\theta \approx \pi/2$ :

$$U \approx -\frac{2Kq\,ar\,(\theta - \pi/2)}{(a^2 + r^2)^{3/2}}\,.$$

1.39 Comme $e^x \approx 1 + x$ quand $x \to 0$, on a, pour $\lambda \to \infty$ :

$$E_P = \frac{8\pi\,hc}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)} \approx \frac{8\pi\,hc}{\lambda^5\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} = \frac{8\pi\,kT}{\lambda^4}\,.$$

La suite découle facilement.

1.40 La longueur d'une courbe d'équation $y = f(x)$ pour $a \le x \le b$ est $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Ici la longueur est 4 fois la longueur de la portion d'ellipse située dans le premier quadrant, ce qui donne directement la première intégrale. La deuxième vient de la substitution $x = a\,\sin\theta$. Comme $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\theta}\,d\theta \approx \int_0^{\pi/2} \left(1 - (1/2)\epsilon^2\sin^2\theta\right)\,d\theta = \left(1 - \epsilon^2/4\right)\,\pi/2\,.$$

# Section 2

2.1 La dérivée seconde $x\,(1-x^2)^{-3/2}$ est croissante pour $x \geq 0$. Pour $x \in [0, 1/2]$, elle ne dépasse pas sa valeur en $x = 1/2$, soit $4\sqrt{3}/9 \approx 0,7698\ldots$. On peut donc prendre dans les deux cas $M = 1$ (on est généreux et les calculs sont plus simples).

a. L'approximation $\arcsin x = x \pm x^2/2$ donne $\arcsin(0,4) = 0,40 \pm 0,08$.

b. L'approximation $\arcsin x = \pi/6 + 2\sqrt{3}/3\,(x - 1/2) \pm 1\,(x-1/2)^2/2$ donne $\arcsin(0,4) = 0,408 \pm 0,005$. Beaucoup mieux.

2.2 a. $|x| \leq 6^{1/3}/10$

b. Comme la dérivée troisième $\sin x$ est bornée par $M = 1$, on a donc $1x^3/3! \leq 2\times 10^{-4}$, d'où $|x| \leq 0,103$. En fait,comme $P_2(x) = P_3(x)$, on a aussi $1x^4/4! \leq 2\times 10^{-4}$, d'où $|x| \leq 0,263$.

2.3 On a $f^{(3)}(t) = (\sqrt{11})(\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}-2)\,(1+t)^{\sqrt{11}-3} \leq (\sqrt{11})(\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}-2)\,(1,1)^{4-3}$ car $u^v$ est croissante en $u$ (si $v > 0$) et en $v$ (si $u > 1$). On a l'estimation $(1,1)^{\sqrt{11}} = 1,37 \pm 0,17$.

2.4 $\left|(\sqrt{1+x})''\right| = 1/4\,(1+x)^{-3/2}$ est décroissante pour $x \geq 0$. Elle ne dépasse pas sa valeur en $x = 0$, d'où $M = 1/4$. On a donc $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + E(x)$ où $|E(x)| \leq x^2/8$. Par substitution, $\sqrt{1+x^5} = 1 + x^5/2 + E(x^5)$ avec $|E(x^5)| \leq x^{10}/8$. En intégrant, on trouve

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^5}\,dx = \int_0^1 \left(1 + x^5/2 + E(x^5)\right)\,dx = 13/12 + \int_0^1 E(x^5)\,dx\,.$$

Or

$$\left|\int_0^1 E(x^5)\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|E(x^5)\right|\,dx \leq \int_0^1 x^{10}/8\,dx = 1/88\,.$$

On a donc $\sqrt{1+x^5} = 13/12 \pm 1/88$.

2.6 a. $e^{1/2} \approx 1 + \frac{1/2}{1!} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} = 1,6458333\ldots$. L'erreur vérifie $|E_3| \leq e^{1/2}\frac{(1/2)^4}{4!} \leq 2\frac{(1/2)^4}{4!} < 0,0053$.

b. $\ln 2 \approx 1 - 1/2 + 1/3 = 0,8333\ldots$. $|E_3| \leq 1/4$ (série alternée).

2.7 a. La série est alternée. Si on garde les termes correspondant à $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (soit $n+1$ termes), l'imprécision sera d'au plus $\frac{1}{2n+3} \leq 10^{-4}$. Il faut $n + 1 = 5000$ termes !

b. $e^{1/2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1/2)^k}{k!} + E_n(1/2)$, où $|E_n(1/2)| \leq 2\frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$. Prendre les 6 premiers termes ($k = 0, 1, \ldots, 5$).

c. $\ln(1,1) \approx \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(0,1)^k}{k}$, avec une erreur d'au plus $\frac{(0,1)^{n+1}}{n+1} \leq 10^{-4}$. Prendre les 3 premiers termes, pour obtenir $\ln(1,1) \approx 0,09533\ldots$

2.8 Les séries de Maclaurin de ces deux fonctions sont alternées *pour tout* $x$. En estimant $\sin x$ par $P_1(x) = P_2(x) = x$, l'erreur est d'au plus $|x|^3/3! < 10^{-3}$. C'est bon pour $|x| < 0,18$ (radians). Si on estime $\cos x$ par $P_2(x) = P_3(x) = 1 - x^2/2$, l'imprécision est d'au plus $|x|^4/4! < 10^{-3}$. C'est bon pour $|x| < 0,39$ (radians).

2.9 a. Pour $x \geq 0$, c'est clair. Pour $x < 0$, $x^{2k+1}$ est toujours négatif.

b. (i) Par Leibniz, $J_1(1) = 7/16 \pm 1/384 = 0,4375 \pm 0,0025$.

(ii) L'erreur (en valeur absolue) est au plus $|x|^5/(2^5 \times 2\,! \times 3\,!) \leq 0,0001$. Résoudre pour $|x|$ donne $|x| < 0,8$ (approximativement).

c. L'erreur en utilisant seulement les $n$ premiers termes de la série est inférieure (en grandeur) à $1/(2^{2n+1}n\,!\,(n+1)\,!) < 0,0001$, ce qui est vérifié à partir de $n = 3$. On a $J_1(1) = 1/2 - 1/16 + 1/384 \pm 1/18432 = 0,44010 \pm 0,00006$.

2.11 c. On a $|f^{(n)}(t)| \leq (n-2)\,!$ (pour tout $t$) car $0 < 1/(1+x^2) \leq 1$. Ainsi $|E_n(x)| \leq \frac{(n-1)\,!}{(n+1)\,!}\,|x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n\,(n+1)}$.

a. Ainsi, $|E_5(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{30}$.

b. $|x| \leq \sqrt[6]{0,03}$, soit l'intervalle (approximatif) $[-0,557; 0,557]$.

d. Comme $\lim_{n\to\infty} |E_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n\,(n+1)} = 0$ (car $|x| < 1$), la série de Maclaurin converge vers la fonction.

e. En prenant $P_n(2)$, l'erreur est au plus de $\frac{2^{n+1}}{n\,(n+1)}$. À partir de $n = 2$, les valeurs successives de la borne sont : 1,333; 1,333; 1,6; et la borne est croissante ensuite. Il faut donc prendre $P_2(2)$ ou $P_3(2)$.

2.12 a. 1, b. $-1/3$, , c. 1, d. $-1$, e. $-2$ , f. $1/6$, g. $-1/12$.

2.16 a. $x^2+2xy+3y^2$. b. $3+2(x-2)-2(y+1)+(x-2)^2+2(x-2)(y+1)+3(y+1)^2$.

c. $1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + 9y^2/2$.

d. $1 - 3(x-1)/2 + y - 9(x-1)^2/8 + 3(x-1)y/2 + y^2/2$.

e. $1 + x + x^2/2 - 9y^2/2 + x^3/6 - 9xy^2/2$.

f. $1 + y(x-1)$.

g. $1 + 2x^2 + 2x(y - \pi/2) + (y - \pi/2)^2/2$.

h. $3 + 4x - 8y$.

i. $\sum_{k\geq 0} 2^k x^k (y+1)^2/(k\,!)$.

2.17 Attention ! la borne pour l'erreur dépend beaucoup de la façon dont on borne les dérivées.

a. b. c. $P_1(-0,1; -0,2) = 0,2$. $P_2 = 1 + 2x + 3y + 4x^2 + 6xy + 9y^2$. On peut prendre $|E_1| \leq (10/2)(0,3)^2 = 0,45$ (pas fort !) et $|E_2| \leq (30/3\,!)(0,3)^3 = 0,135$ (à peine mieux).

d. $P_1(0,8; -0,1) = 1,2$, $|E_1(0,8; -0,1)| \leq 1,125$ (pas fort !).

e. f. $P_2 = P_3 = 1 + 2x^2 + 2x(y - \pi/2) + (y - \pi/2)^2/2$. $|E_1| \leq 1,5\,(|x| + |y - \pi/2|)^2$, $|E_2| \leq 0,8\,(|x| + |y - \pi/2|)^3$.

g. $P_2 = xy$, $|E_2| \leq 0,2\,(|x| + |y|)^3$.

h. $P_2 = 1 - x^2/2 - y^2/2$, $|E_2| \leq 0,2\,(|x| + |y|)^3$.

# Section 3

3.2 a. $y = \sin(\arcsin x + C)$ ou mieux $y = x\,\cos C + \sqrt{1-x^2}\,\sin C$.
b. $(1+x^2)(1+y^2) = C$. c. $y\,\sin y + \cos y + \ln|\cos x| = C$.
d. $x^6(1+y^3)^2 = C\,(1+x^2)^3$. e. $25\,y^3(1-3\,\ln|y|) = 9\,x^5(1-5\,\ln|x|) + C$.
f. $u = C\,(1+v^2)^2$. g. $y = \frac{x^2}{2x^2+x-2}$. h. $y = \frac{4x-4}{3x-4}$. i. $y = \frac{x}{(x-1)\,e^x+C}$.
j. $y = \frac{C\,e^{-x}-1}{x}$.

3.3 a. **Façon 1.** Séparer les variables : $\frac{dy'}{y'} - 4dx = 0$, intégrer : $\ln|y'| = 4x + C_1$, isoler : $y' = C_2e^{4x}$. La condition $y'(0) = 1$ donne $y' = e^{4x}$, d'où $y = \frac{e^{4x}}{4} + C_3$. L'autre condition donne $y = \frac{e^{4x}+3}{4}$.

**Façon 2.** On a $dy' = 4\,y'\,dx$. Intégrer : $y' = 4\,y + C$. Utiliser les conditions : $y' = 4\,y - 3$. Séparer les variables : $\frac{dy}{y-3/4} = \frac{dx}{4}$. Intégrer et isoler $y = C\,e^{x/4} + 3/4\ldots$

b. $y = e^{2x} - 1$.

c. On a : $\frac{dy'}{dx} = 2\,y\,\frac{dy}{dx}$, d'où $dy' = 2\,y\,dy$ (séparée), puis successivement $y' = y^2+1$, $\frac{dy}{y^2+1} = dx$, $\arctan y = x + C$ et finalement $y = \tan x$.

d. $2\,y'\,dy' + 18\,y\,dy = 0$ donne $y'^2 + 9\,y^2 = C$, puis $\frac{dy}{\sqrt{1-9\,y^2}} = dx$, puis $\arcsin(3\,y) = 3x + C$ et $y = \frac{1}{3}\sin(3x)$.

e. Multiplier tout par $2\,y'$. On retombe sur le précédent.

f. (i) Le volume du cylindre étant $\pi\,r^2h = 4\,\pi$, on trouve le niveau initial : $h_0 = 1$ m. Le réservoir perd son eau (volume) au taux de $0,25\,\sqrt{h} \times \pi\,(0,02)^2$ m$^3$/s. On a donc $\frac{dV}{dt} = \pi\,r^2\,\frac{dh}{dt} = -0,25\,\sqrt{h} \times \pi\,(0,02)^2$ ou, après simplification : $\frac{dh}{dt} = -0,25 \times 10^{-4}\sqrt{h}$. On trouve alors : $h = (1 - 0,125 \times 10^{-4}t)^2$. Il se vide en $8 \times 10^4$ s, soit en 22 h 13 min 2 s.

(ii) Ici, $h_0 = 3$ m. Quand le niveau est $h$, le rayon $r$ de la surface liquide vérifie $r = 2h/3$ et le volume d'eau est : $V = 4\,\pi\,h^3/27$. On a donc $\frac{dV}{dt} = \frac{4\,\pi\,h^2}{9}\,\frac{dh}{dt} = -0,25\,\sqrt{h} \times \pi\,(0,02)^2$, soit : $h^{3/2}\frac{dh}{dt} = -2,25 \times 10^{-4}$. On trouve alors : $h^{5/2} = 3^{5/2} - 5,625 \times 10^{-4}t$. Il se vide en environ 27712, 8 s, soit en 7 h 41 min 52,8 s.

g. É.D. : $v' = k\,v^2$ donnant $v = \frac{50}{9t+5}$ m/s. Il faut 95/9 s pour atteindre 0,5 m/s.

h. É.D. : $x'' = -k^2x$ ou mieux $2\,x'\,dx' = -k^2 2\,x\,dx$ ($x$ représentant le déplacement de la masse). On trouve alors $x' = k\sqrt{1-x^2}$, d'où $x = \sin kt + C$. En tenant compte des conditions initiales, on a : $x = \cos(2\pi\,t)$. La vitesse maximale est $2\pi$ m/s.

3.4 a. $y = |x|\,\sin(\ln|Cx|)$ (pour $x \neq 0$). b. $\ln|y-x| = C + x/(y-x)$.
c. $2\,\ln|y| = x^2/y^2 + C$. d. $y^2 - x^2 = Cy$.
e. $x\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) = Cy$ (pour $x > 0$), $\sqrt{x^2+y^2} + x = Cxy$ (pour $x < 0$).
f. $y = x\tan(C/x)$. g. $2y^2\ln|x/y| + y^2 - 4x^2\ln|x| = Cx^2$. h. $x^3 - 2y^3 = Cx$.
i. $(y-x)(3x+y) = C\,(x+y)$.

3.5 a. $3x^3 + x^2 = y^2$. b. $y' = (y/x)^2$; $y = 2x/(2-x)$.

3.6 a. Poser $v = (y-2)/(x+1)$, isoler $y = 2 + (x+1)v$, dériver : $y' = (x+1)v' + v$ et traduire : $(x+1)v' + v = v - 1$. On obtient $y = x\,(C - \ln|x+1|)$.

b. La pente de la courbe en $(x, y)$ est $y' = (y-x-3)/(x+1) = (y-2)/(x+1)-1$. La courbe vérifie $y = x\ (1 + \ln 2 - \ln|x+1|)$.

3.7 Quand Félix est au point $(x, y)$, son rival est en $(y, x)$. Félix vise alors le point $(y/2, x/2)$, d'où $y' = (y - x/2)/(x - y/2)$. Ceci conduit à la solution $y - x = (y + x)^3$.

3.8 a. $y = e^x\ \left(x^3 + 2x^2 - 3x + C\right)$. b. $y = \left(e^{2x} + 2\ \cos x + C\right)/(2x)$.
c. $x = (1/2)\ \ln y + C/(\ln y)$. d. $y = \frac{4x^3-9x^2+C}{6\,(2x-3)^{3/2}}$. e. $3xy = -4 + C\,y^3$.
f. $y = \csc x - 5\,e^{\cos x}\ \csc x$. g. $y = (C + \cos 2x)\ \csc^{1/2} 2x$.
h. $y = (a-x)(a+x)^2/3 + C\,(a-x)/(a+x)$. i. $x = C\,e^{y^2/2} - y^2 - 2$.
j. $y = C\ \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. k. $y = 4x + \frac{C+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|}{x+\sqrt{1+x^2}}$.
l. $y = \ln(2\ \sin x - 2\ \cos x + C\,e^{-x})$.
m. $\cos y = (1/2)\ \sin^2 x - (1/2)\ \sin x + 1/4 + C\,e^{-2\ \sin x}$.

n. Si $T$ est la température du corps (en °C), $t$ minutes après le début de l'expérience, on aura : $T' = (180\,e^{-t/10} - T)/5$ (clairement, le corps doit gagner de la chaleur). La solution générale est : $T = C\,e^{-t/5} + 360\,e^{-t/10}$. La température en $t = 0$ donne : $T = 360\,(e^{-t/10} - e^{-t/5})$. En posant $T' = 0$, on trouve que la température maximale est atteinte quand $t = 10\ \ln 2$. Elle est alors de 90° C (valeur exacte du modèle).

o. Si $(0, P)$ est le point d'intersection de la tangente avec l'axe $OY$, on trouve, en comparant les pentes : $(y-P)/x = y'$, d'où $P = y - xy'$. Le trapèze a $y$ et $P$ comme côtés verticaux et $x$ comme base. son aire vérifie donc : $x\,(2y - xy')/2 = 1$ qui se transforme en $y' - (2/x)\,y = -2/x^2$. La solution générale est $y = C\,x^2 + 2/(3x)$. En tenant compte du point de passage, on obtient $y = x^2/3 + 2/(3x)$.

3.9 a. $y = 2/\left(x(\cos x^2 + C)\right)$. b. $y = (x + 1 + C\,e^x)^{1/3}\,x^{-2/3}e^{-x/3}$.
c. $y = 2^{1/3}\left(C\,e^{3x^2} - 1\right)^{-1/3}$. d. $y = (C\,e^x - \sin x)^{-1}$.
e. $y = (C\,e^x - 2x - 1)^{-1/3}$. f. $y^2 = 4\ (\cos 2x)\,/\,(C - 4x - \sin 4x)$.
g. $y^2 = \left(C\,(1+x)^2 - (1+x^2)\ \ln(1+x^2) - 1\right)^{-1}$. h. $x^4 = 4/\left(C\,e^{-4y} - 4y + 1\right)$.

3.10 On trouve $B = (0, y - xy')$. L'équation $|OA|^2 = |OB|^2$ se traduit alors en : $(-xy')^2 + x^2 = (y - xy')^2$ et se simplifie en $x^2 = y^2 - 2xyy'$ (une Bernoulli). On pose $z = y^2$, $z' = 2yy'$ et l'équation devient $z - xz' = x^2$ (linéaire). La solution générale est $z = y^2 = C\,x - x^2$. Avec le passage à $(1, 1)$, on a : $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ou mieux : $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

3.11 a. $xy$ b. $t^2y^2$ c. $tx^2$ d. $t/x$ e. $t^2e^{4y}$ f. $y^3 \sin x$ g. $e^{xy}$
h. $\ln|xy|$ i. $y^4 \ln|x|$ j. $y^2/x$ k. $\arctan(y/x)$ l. $y/x$ m. $\ln(x+y)$
n. $(1/2)\ \arctan(y/(2x))$ o. $\ln(4x^2 + y^2)$.

3.12 a. $y\ \cos x - \sin y = C$. b. $x^3 + 3y = xy^2 + C$. c. $e^{xy} + y\ \ln x = C$.
d. $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2x + y^3 + 3y = C$. e. $y^3 - 3y^2 - 3xy = 6x - 3x^3 + C$.
f. $x^4 + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 4x^2 + 6xy - 2y^4 - 2y^2 = C$. g. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 3xy + C$.
h. $e^{x^2y} + e^{xy^2} = y^2 - x + C$.

3.13 N. B. Plusieurs facteurs peuvent intégrer une même différentielle.
a. $x$ b. $1/x$ c. $1/x$ d. $\sqrt{2x-3}$ ou $1/y$ e. $e^{-x}$ ou $1/y$
f. $1/x^3$ ou $y^5$ g. $e^{-t}$ ou $\sin^3 x$ h. $1/(x^2y)$ ou $y^2$ ou $x^{-4/3}$

i. $\sec x$ ou $y^{-2}$ j. $1/(xy)$ ou $x^{-3/2}$ ou $y^{-2}$ k. $x^{-2}$ ou $y^{-2}$ ou $1/(xy)$
l. $1/y$ ou $(2x-3)^{3/2}$ m. $1/x$.

3.14 a. $y = x/(C-x)$. b. $2xy + x^2 + 2\ln|x| = C$. c. $y + 2xy - 2xy\,\ln|y| = Cx$.
d. $x^5y^5 + y = Cx^2$. e. $y = x\,\tan(C-x)$. f. $y = x\,\tan(y+C)$.
g. $y = 4x/(2x - \sin 2x + C)$. h. $x^2 + y^2 = C\,e^{-2x}$. i. $xy = C\,e^{x^2}$.

3.15 a. séparable, $y = \tan(\arctan x + C)$ ou mieux $y = \frac{x+C}{1-Cx}$.
b. Bernoulli ou facteur intégrant $\sin^3 x$; $y^4 = \frac{-12\cos x + 4\cos^3 x + C}{3\sin^4 x}$.
c. exacte, $x^2y^3 - 3xy + \ln|y| = C$.
d. linéaire, $y = (\tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C)\cos^2 x$.
e. homogène, $y^2 = x^2(Cx^2+1)$. f. linéaire, $y = \frac{x^3 - 4x^2\ln|x| - 4x + Cx^2}{(x-2)^2}$.
g. exacte, homogène, $\arctan(y/(2x)) + \ln(4x^2+y^2) = C$.
h. séparable, $y^2 = 2\sin\left(C - x^4\right)$. i. homogène, $y = (C^2x^2-1)/(2C)$.
j. Bernoulli ou facteur intégrant $x$; $y^3 = \frac{x+1+C\,e^x}{x^2e^x}$.
k. exacte, $3x^2 + 2xy - 4y^2 = C$.
m. homogène, $y = x\,\ln|Cx^2+1|$.
n. linéaire ($x$ comme fonction de $y$), exacte; $xy = y\,\sin y + \cos y + C$.
o. séparable, $x^4 = 2\,\ln\left|\sqrt{e^{2y}+4} - 2\right| - 2y + C$.
p. linéaire, facteur intégrant $x^{-2}$; $y = C\,x - \ln x - 1$.
q. homogène, $\ln(x^2+y^2) = 2\,\arctan(y/x) + C$. r. séparable, $y = C\,x^{-2/3}$.

3.16 a. Bernoulli, $y = 4/(2\,\ln x + 15x^2 + 1)$. b. linéaire, $y = x^2(1 - e^{1/x})$.
c. exacte, $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y = 0$.
d. séparable, $y^2 - \ln(y^2+1) = 2x + 2\ln|x-1| - \ln 5$.
e. linéaire, facteur intégrant $x$; $y = (2-x^2)/x^3$. f. homogène, $x = \exp(t^2/(2x^2))$.
g. exacte, $2\,\cot y = 3 - \tan x$. 3.17 a. $xy' + y = 0$. b. $(x^2-y^2)y' = 2xy$. c. $y - 2 = (x-1)y'$.
d. $(x^2 - y^2 - 1)y' = 2xy$. e. $(x^2-1)y' = 2xy$. f. $(x^2-1)y'^2 + y^2 = 1 + 2xyy'$.

3.18 a. $x^2 - y^2 = C$. b. $x^2 + y^2 = Cx$. c. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = C$.
e. $x^2 + 2y^2 = 2\ln|x| + C$.

3.19 a. $y' = 2y$ ; $y = Ce^{2x}$. b. $x + yy' = 0$ ; $x^2 + y^2 = C$.
c. $2x + yy' = 0$ ; $2x^2 + y^2 = C$. d. $yy' = x$ ; $x^2 - y^2 = -5$.
e. $xy' + y = 0$ ; $xy = C$. f. $yy' = x$ ; $x^2 - y^2 = C$.
g. $yy' + 1 = 0$ ; $y^2 \pm 2x = C$. h. $y' = y$ ; $y = Ce^x$.
i. $4\int_0^x y\,dx = xy$, d'où : $xy' = 3y$ ; $y = Cx^3$.

3.20 L'équation de la famille de tractrices est : $y' = -\sqrt{1-x^2}/x$. Celle de la famille orthogonale : $y' = x/\sqrt{1-x^2}$, de solution : $y = C - \sqrt{1-x^2}$ ou $x^2 + (y-C)^2 = 1$.

3.21 30m$= 10 \times 3$m, donc 10 diminutions de moitié. Il reste donc $1/1024 \approx 0,1\%$. Par É.D. : si $P(x)$ est la proportion de lumière se rendant à $x$ mètres de profondeur, on a : $dP = kP\,dx$. Donc $P = Ce^{kx}$. Si $x = 0$, on a $P(0) = 1$, d'où $P = e^{kx}$. Comme $P(3) = e^{3k} = 1/2$, on a : $P = 2^{-x/3}$.

3.22 $Q'(t) = -kQ$ avec $Q(1600) = Q_0/2$ ; $Q(t) = Q_0(1/2)^{t/1600}$. 4,24 %.

3.23 Soit $r(t)$ le rayon (cm) de la balle au bout de $t$ heures. On a $(4\pi r^3(t)/3)' = k(4\pi r^2(t))$, d'où : $r' = K$, $r = Kt + C$. Les conditions initiales donnent : $r = -t + 4$. Elle fond en 4 heures.

3.24 $T'(t) = -k(T - 20)$ avec $T(0) = 100$ et $T(20) = 60$. $T(t) = 20 + 80(1/2)^{t/20} = 20 + 80e^{-0,03468t}$.

3.25 $T'(t) = -0,03468(T - T_a)$ avec $T(0) = 100$ et $T(12) = 60$. $T(t) = T_a + (100 - T_a)(1/2)^{t/20}$. $T_a = -17,5°$C. On en a besoin, du café !

3.26 a. $P(t) = \frac{1800}{1+5\,e^{-0,05\ln(5/2)\,t}}$ Mhab. b. 1800 Mhab c. $t = \frac{25\ln(5)}{\ln(5/2)} \cong 43,9$, donc vers la fin de 1993 ; $P = 900$ Mhab.

3.27 Soit $z$ la quantité de $C$ (en grammes) formée jusqu'au moment $t$ (en secondes). a. $\dot{z} = 0,05(40 - 0,4z)(60 - 0,6z)$ avec $z(0) = 0$ ; $z(t) = \frac{120t}{1+1,2t}$ ; b. $\dot{z} = 0,05(50 - 0,4z)(50 - 0,6z)$ avec $z(0) = 0$ ; $z(t) = 250\frac{e^{0,5t}-1}{3e^{0,5t}-2}$. c. (a.) 5/6 s ; (b.) $2\ln(4/3)$ s.

3.28 $150\,\dot{v}(t) = 70 - 2\,v(t)$ avec $v(0) = 0$. Au bout de 1 s, il ira à $35\left(1 - e^{-2}\right) \approx 30,3$ m/s. 3.29 $30\,\dot{v}(t) = -60\,v(t) + 120e^{-t}$ avec $v(0) = 0$. $v(t) = 4\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$ m/s.

3.30 175 N.

3.31 $v(t) = 5\frac{6+5e^{-0,4gt}}{6-5e^{-0,4gt}}$ m/s (la vitesse est indépendante de la masse) ; la vitesse-limite est 5 m/s. $m\dot{v} = mg - mgv^2/25$ avec $v(0) = 55$.

3.32 $T_0 = T\cos\theta$, $Mgx/(2L) = T\sin\theta$ ; $Mgx/(2LT_0) = y'$. Donc $y = Kx^2 + C$ ; c'est une parabole.

3.33 $\dot{m}(t) = -0,02\,m(t)$ avec $m(0) = 60$ g ; $m(t) = 60e^{-0,02t}$. 18,07 g.

3.34 $\dot{m}(t) = 0,3 - 0,03\,m(t)$ avec $m(0) = 20$ kg. $m(t) = 10 + 10e^{-0,03t}$ kg.

3.35 a. $x' = u = 8\,e^{-2\,t}$ m/s et $K = 2$ s$^{-1}$. b. $y' = v = 7,9\,e^{-2\,t} - 4,9$ m/s.
c. $x = 4\,(1 - e^{-2\,t})$ m et $y = 5,95 - 4,9\,t - 3,95\,e^{-2\,t}$ m.

3.36 $\dot{m}(t) = \frac{-5}{100-t}\,m(t)$ avec $m(0) = 20$ kg. $m(t) = 20\,(1 - 0,01t)^5$ kg.

3.37 $\dot{m}(t) + \frac{2}{100-t}\,m(t) = 0,15$ avec $m(0) = 5$ kg ; $m(t) = 0,001(100 - t)(50 + t)$ kg. 4,4 kg.

3.38 On trouve $[\mathrm{N_2\,O_5}] = 14,5e^{-1,79t}$ mol/m$^3$ (où $t$ est en heures (h)). De là, on obtient : $\frac{d}{dt}[\mathrm{N_2\,O_5}]\big|_{t=0} = -25,96$ mol/(m$^3$h) ; $k = -1,79\,\mathrm{h}^{-1}$ ; $[\mathrm{N_2\,O_5}]\big|_{t=2} = 0,404$ mol/m$^3$ ; temps de demi-réaction : 0,387 h (soit environ 23 min 14 sec).

3.39 $250\,\dot{q}(t) + 1250\,q(t) = 50$ avec $q(0) = 0$ C. $q(t) = 40\left(1 - e^{-5t}\right)$ mC.

3.40 a. $V = \pi h^3/12$ ; $dV/dt = \pi h^2/4\,dh/dt = -k\,\pi h^2/4$ avec $h(0) = 2$ et $h(2) = 1$. $h(t) = 2 - t/2$ m.

b. $dV/dt = \pi h^2/4\, dh/dt = -k$ avec $h(0) = 2$ et $h(2) = 1$. $h(t) = \sqrt[3]{8 - 7t/2}$ m.

3.41 $-\pi(36)^2\, dh = \pi(2)^2\, 4,5\sqrt{h}\, dt$ ; $t(h) = 144\left(10 - \sqrt{h}\right)$. 24 minutes.

3.42 $a(t - t_0)\, dx = k\, dt$ ou $A\, dx = \frac{dt}{t-t_0}$ avec $x(0) = 0$, $x(1) = 2$ et $x(2) = 3$. Il a commencé à neiger $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ heures avant midi.

3.43 a. $\ddot{x} + 4x = 0$ avec $x(0) = 3$ m et $\dot{x}(0) = 0$ m/s. $x(t) = 3\cos(2t)$ m.
b.$\ddot{x} + 4x = 0$ avec $x(0) = 3$ m et $\dot{x}(0) = -8$ m/s. $x(t) = 3\cos(2t) - 4\sin(2t)$ m.

3.44 $\dot{v} = -9,8 - 9,8v$ avec $v(0) = 1$ ; $v(t) = -1 + 2e^{-9,8t}$ ; $h(t) = -t + \frac{1}{4,9}\left(1 - e^{-9,8t}\right)$. La hauteur maximale atteinte est $(1 - \log 2)/g$ m. Le retour au sol se fait au temps 0,162615 s.

3.45 $m\,\ddot{s} = -k/s^2 = -mgR^2/s^2$ ; $v^2/2 = gR^2/s + C$. a. $v(R) = \sqrt{8gR/5} \cong 10,0$ km/s. b. $v(R) = \sqrt{2gR} \cong 11,18$ km/s.

3.46 Si $r$ est la distance du corps au centre de la lune, on a : $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k}{r^2}$. Quand $r = R_L$ (le rayon de la lune), l'accélération est $g_L = 1,6$. Donc $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{g_L R_L^2}{r^2}$. On trouve alors : $r'\, dr' = \frac{g_L R_L^2}{r^2}\, dr$, d'o'u : $r'^2/2 = -\frac{g_L R_L^2}{r} + A$. Comme $r' = 0$ quand $r = R_L$, on a : $r'^2/2 = g_L R_L\left(1 - \frac{R_L}{r}\right)$. Si $r \to \infty$, on a : $r'^2/2 = g_L R_L$, donc $r' = \sqrt{2g_L R_L} \approx 2,3$km/s.

3.47 Soit $y$ la position (verticale) en mètres du corps au temps $t$ (secondes) par rapport à la position au repos. L'É.D. s'écrit $3\,\ddot{y} = -300\,y$ avec $y_0 = -0,06$ et $\dot{y}_0 = 0$. La solution est $y = -0,06\cos(10t)$. Il s'agit bien sûr d'un mouvement harmonique simple.

3.48 $7,2\,\ddot{x} + 36g\,x = 0$ avec $x(0) = 0,10$ et $\dot{x}(0) = -0,35$. $x(t) = 0,10\cos(7t) - 0,05\sin(7t)$ m.

3.49 $m\,\ddot{h} = -\pi r^2 h\,\rho g$ où $\rho = 10^{-3}$kg/m$^3$ est la densité de l'eau. En résolvant, on trouve la période : $T = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$. La masse en fonction de la période : $m = \frac{\rho g r^2 T^2}{4\pi}$. Dans le cas présent : $m \approx 780$ kg.

3.50 b. $y(t) = \frac{I}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$. c. $5/6\,\log(2)$ mg/min.

3.51 $y\, dx = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$. $y = \frac{e^{kx+c} + e^{-kx-c}}{2k} = \frac{1}{k}\cosh(kx + c)$ : une *caténaire.*

3.52 $\int_0^x f(t)\, dt = [f(x)]^3$. $3y^2 - 2x = C$.

3.53 Au temps $t$, la souris est au point $(0, vt)$. Si, à ce moment, le chat est en $(x, y)$, on a $y' = (y - vt)/x$ qui se simplifie en $xy' - y = -vt$. En dérivant par rapport à $t$, on obtient : $xy''\, dx = -v\, dt$.

La vitesse du chat vérifie :

$$V\, dt = -\sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

Diviser ces deux dernières équations pour obtenir $\frac{xy''}{\sqrt{1+y'^2}} = v/V$. Intégrer deux fois en tenant compte des conditions initiales (quand $t = 0$, $(x, y) = (1, 0)$ et $u = y' = 0$ car le chat vise la direction horizontale) :

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} - \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}\right).$$

Si le chat rattrape la souris, on a $x = 0$. L'ordonnée du chat est alors $\alpha/(1-\alpha^2)$. Il faut donc que $\alpha/(1-\alpha^2) < h$. 3.54 Soit $S$ le sommet, $T$ le point de sortie et $O$ le

centre. Soit $\theta$, l'angle $OST$. Si l'objet est situé, au temps $t$, à $x(t)$ unités de distance de $S$, son accélération sera : $\ddot{x} = g\cos\theta$. Sa position est donc $x = g\cos\theta\, t^2/2$. Comme $T$ est situé à $2R\cos(\theta)$ de $S$ (où $R$ est le rayon de la sphère). Le trajet prendra un temps $t = 2\sqrt{R/g}$, qui ne dépend pas de la position de $T$.

3.55 Comme l'accélération gravitationnelle sur le wagon est proportionnelle à la distance $r$ de celui-ci au centre de la Terre, elle prend la forme $-g\,r/R$. Sa composante dans la direction du tunnel est alors

$$-\frac{g\,r}{R}\,\frac{x}{r} = -\frac{g\,x}{R},$$

où $x$ est la position du wagon (au temps $t$) relativement au milieu du tunnel. On a donc $x'' = -\frac{g\,x}{R}$. La solution, en tenant compte des conditions initiales, est

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$$

($A$ est donc la valeur de $x$ à Montréal et $-A$ sa valeur à Paris).

Pour se rendre à Paris, il faut une demi-période, qui vaut $t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42$ min. Comme la demi-période ne dépend pas de la distance entre les deux villes, le trajet durera le même temps entre n'importe quels deux points sur Terre.

La vitesse ($x'$) sera maximale quand $x'' = -\frac{gx}{R} = 0$, ce qui se produit quand $x = 0$. La vitesse est alors $x' = -A\sqrt{\frac{g}{R}}$. Pour le voyage aux antipodes, $A = R$, d'où $x' = -R\sqrt{\frac{g}{R}} = -\sqrt{Rg} \approx -8$ km/s.

3.56 La situation étant symétrique pour chaque fourmi, il suffit de décrire la trajectoire d'une seule d'entre elles, disons la fourmi $A$. Quand celle-ci se trouve au point $(x, y)$, la fourmi $B$ est au point $(-y, x)$ et on pourra écrire, en comparant les pentes :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x + y},$$

une homogène. Sa solution : $\arctan v + \ln\sqrt{1+v^2} = -\ln|x| + C$. En supposant, sans perte de généralité, que les coins de la table sont $(\pm1, 0)$ et $(0, \pm1)$ et que $A = (1, 0)$, on a $C = 0$. Après retour aux variables $x$, $y$ et simplification, on trouve $\arctan(y/x) + \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$ ou mieux, en coordonnées polaires : $r = e^{-\theta}$.

## Notes