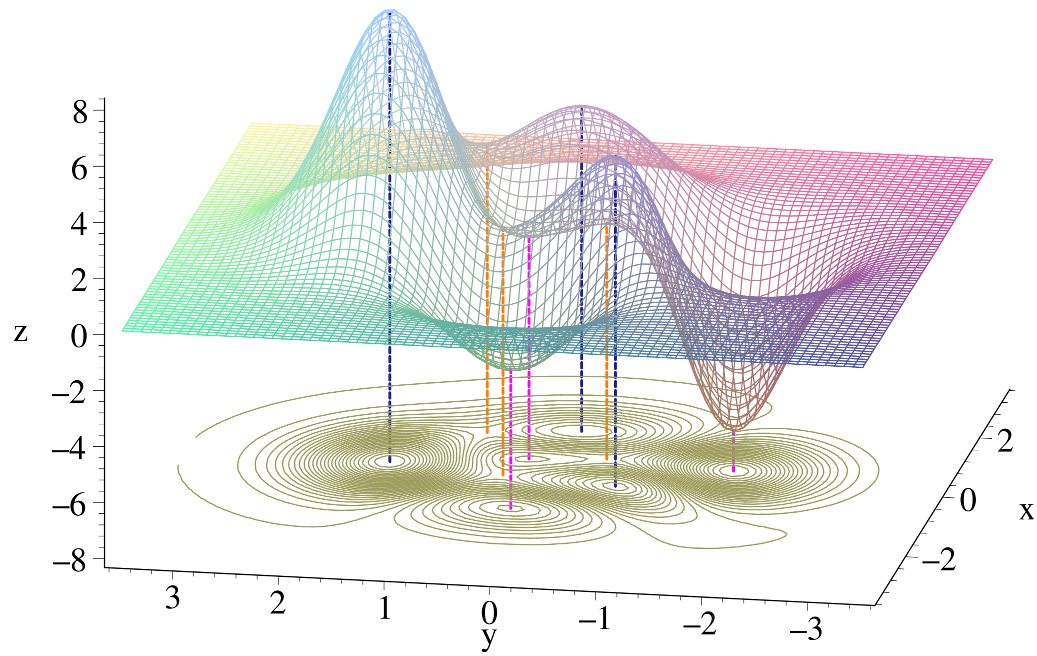
Aide-Mémoire
Les dérivées partielles

(Calcul différentiel et intégral avancé)



Pierre Lantagne, enseignant retraité

Soit f une fonction réelle de deux variables $\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto z = \mathrm{f}(x,y) \end{aligned}$

Déf. 1 (Domaine de définition). *Le domaine de définition D d'une fonction f de deux variables est l'ensemble de tous les couples (x, y) pour lesquels $f(x, y) \in \mathbb{R}$.*

$$D = \left\{ (x,y) \middle| f(x,y) \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Déf. 2 (Ensemble image). *L'ensemble image Ima_f d'une fonction f de deux variables est l'ensemble de toutes les valeurs atteintes par la fonction f.*

$$Ima_f = \left\{ f(x,y) \middle| (x,y) \in D \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Représentation graphique La représentation graphique d'une fonction de deux variables définie sur D est l'ensemble de tous les points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)$ et $(x, y) \in D$.

Déf. 3 (Courbes de niveau). *Les courbes de niveau d'une fonction f de deux variables sont les courbes d'équations $f(x, y) = k$ où k est une constante (de l'ensemble image de f).*

La représentation graphique des courbes de niveau est appelée diagramme de courbes de niveau. Ce diagramme est constitué par la projection dans le plan Oxy de chaque trace horizontale sur la surface obtenue avec le plan d'équation $f(x, y) = k$ ($k \in Ima_f$)

Déf. 4 (Surfaces de niveau). *Une fonction de trois variables f est une règle qui assigne à chaque triplet ordonné (x, y, z) dans le domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un unique nombre réel w, noté $w = f(x, y, z)$.*

Il n'y a pas de représentation graphique possible pour de telles fonctions car leur graphique devrait se trouver dans un espace à quatre dimensions.

*Néanmoins, on peut examiner ses **surfaces de niveau** qui permettrons de mieux comprendre le comportement de f. Ce sont des surfaces d'équations*

$$f(x,y,z) = k, \text{ où } k \in Ima_f$$

Déf. 5 (Limite). *On écrit*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

*et on dit que la **limite de** $f(x, y)$ **lorsque** (x, y) **tend vers** (a, b) **est** L si on peut rendre les valeurs de f(x, y) aussi proches que l'on veut de L en choisissant (x, y) suffisamment proche du point (a, b), mais non égal à (a, b).*

Autres notations:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L \quad \text{et} \quad f(x,y) \to L \text{ lorsque } (x,y) \to (a,b)$$

***Remarque**: Si $f(x, y) \to L_1$ lorsque $(x, y) \to (a, b)$ le long d'un chemin $\mathcal{C}_1$ et $f(x, y) \to L_2$ lorsque $(x, y) \to (a, b)$ le long d'un chemin $\mathcal{C}_2$ avec $L_1 \neq L_2$, alors la limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ n'existe pas.*

Déf. 6 (Continuité). *Une fonction f de deux variables est dite* ***continue en*** *(a,b) si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \Longleftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b)$$

On dit que f est ***continue sur*** *D si f est continue en tout point (a,b) de D.*

Déf. 7 (Dérivées partielles). *Les dérivées partielles d'une fonction f de deux variables sont les fonctions f'_x et f'_y définies par*

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$
$$f'_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+hy)-f(x,y)}{h} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Déf. 8 (Notation des dérivée partielles). *Si $z = f(x,y)$, on écrit*

$$f'_x(x,y) = f'_x = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f'_y(x,y) = f'_y = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_2 = D_2 f = D_y f$$

Règle de calcul des dérivées partielles de $z = f(x,y)$

1. Pour calculer f'_x, regarder y comme une constante et dériver $f(x,y)$ par rapport à x.

2. Pour calculer f'_y, regarder x comme une constante et dériver $f(x,y)$ par rapport à y.

Déf. 9 (Dérivées d'ordre supérieur). *Les dérivées partielles d'ordre supérieur*

$$(f'_x)'_x = f_{xx}'' = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f'_x)'_y = f_{xy}'' = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$\left(f'_y\right)'_x = f_{yx}'' = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\left(f'_y\right)'_y = f_{yy}'' = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Th. 1 (Théorème de Clairaut). *On suppose que f est définie sur un disque D contenant le point (a,b). Si les fonctions f''_{xy} et f''_{yx} sont toutes deux continues sur D, alors*

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$$

Déf. 10 (Plan tangent). *Soit f une fonction dont les dérivées partielles sont continues. Une équation du plan tangent à la surface* $z = \mathrm{f}(x,y)$ *au point* $P(x_0,y_0,z_0)$ *est*

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Linéarisation La fonction $\mathcal{L}$ du premier degré dont la représentation graphique est le plan tangent est appelée la linérarisation de f en (a,b)

$$\mathcal{L}(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

et

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

est appelée approximation linéaire (par le plan tangent) de f en (a,b).

Attention: Bien que la fonction de linéarisation $\mathcal{L}(x,y)$ donne une approximation de $f(x,y)$ au voisinage de (a,b)

$$f(x,y) \approx \mathcal{L}(x,y) \quad (x,y) \text{ voisin de } (a,b)$$

il faut s'assurer de certaines conditions pour que cette fonction modélise bien la fonction f dans le voisinage de (a,b).

Déf. 11 (Fonction différentiable). *Une fonction f de deux variables est différentiable en (a,b) si l'accroissement de la fonction* Δz *peut être écrit sur la forme*

$$\Delta z = f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

où $\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)$ *et* $\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) \longrightarrow 0$ *lorsque* Δx *et* $\Delta y \longrightarrow 0$

Th. 2 (Fonction différentiable). *Si les dérivées partielles* f'_x *et* f'_y *existent à proximité de* (a,b) *et sont continues en* (a,b)*, alors f est différentiable en* (a,b)*.*

Approximation linéaire Si f est différentiable en (a,b), nous avons

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \\ &= f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

En prenant $\begin{aligned} \Delta x &= x - a \quad (x \text{ voisin de } a) \\ \Delta y &= y - b \quad (y \text{ voisin de } b) \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \Delta z &= f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y \\ &\approx f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) \end{aligned}$$

Donc, si f est différentiable en (a,b), le plan tangent modélise bien la fonction au voisinage de (a,b).

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$
$$(\text{pour } (x,y) \text{ voisin de } (a,b))$$

Déf. 12 (Différentielle totale). *La différentielle (totale) dz est définie par*

$$\begin{aligned} dz &= f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \end{aligned}$$

En prenant $dx = \Delta x = (x-a)$ *et* $dy = \Delta y = (x-b)$, *la différentielle* dz *s'écrit*

$$dz = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Déf. 13 (Les fonctions de trois variables ou plus). *Toutes les notions, que ce soient les approximations linéaires, la différentiabilité ou les différentielles, peuvent être définies de manière analogue pour les fonctions de plus de deux variables.*

Dans le cas d'une fonction de trois variables f *définie par* $w = f(x,y,z)$:

— *une fonction f de trois variables est différentiable en (a,b,c) si* Δw *peut être écrit sur la forme*

$$\Delta w = f'_x(a,b,c)\Delta x + f'_y(a,b,c)\Delta y + f'_z(a,b,c)\Delta z + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta y + \varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta z$$

où $\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ *et* $\varepsilon_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z) \longrightarrow 0$ *lorsque* Δx, Δy *et* $\Delta z \longrightarrow 0$

— *la linéarisation de f est*

$$\mathcal{L}(x,y,z) = f(a,b,c) + f'_x(a,b,c)(x-a) + f'_y(a,b,c)(y-b) + f'_z(a,b,c)(z-c)$$

*et l'**approximation de linéaire** est*

$$f(x,y,z) \approx f(a,b,c) + f'_x(a,b,c)(x-a) + f'_y(a,b,c)(y-b) + f'_z(a,b,c)(z-c)$$
$$(\text{pour } (x,y,z) \text{ voisin de } (a,b,c))$$

— *l'**accroissement** de w est*

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

— *la **différentielle** (totale) dz est définie par*

$$\begin{aligned} dw &= f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz \\ &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned}$$

En prenant $dx = \Delta x = (x-a)$, $dy = \Delta y = (x-b)$ *et* $dz = \Delta z = (z-c)$, *la différentielle* dw *s'écrit*

$$dw = f'_x(a,b,c)(x-a) + f'_y(a,b,c)(y-b) + f'_z(a,b,c)(z-c)$$

Th. 3 (Règle de dérivation des fonctions composées). *(Cas 1). On suppose que* $z = f(x,y)$ *est une fonction différentiable de x et y, où* $x = g(t)$ *et* $y = h(t)$ *sont toutes les deux des fonctions dérivables de t. Alors z est une fonction dérivable de t.*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Th. 4 (Règle de dérivation des fonctions composées). *(Cas 2). On suppose que $z = f(x,y)$ est une fonction différentiable de x et y, où $x = g(s,t)$ et $y = h(s,t)$ sont toutes les deux des fonctions différentiables de s et t. Alors*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Th. 5 (Règle de dérivation des fonctions composées). *(Cas général). On suppose que $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction différentiable de n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, et chaque fonction x_j est une fonction différentiable de m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$, Alors u est une fonction de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ et*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

pour chaque $i = 1, 2, \ldots, m$

Déf. 14 (Dérivation implicite). *On suppose que $y = f(x)$ est définie implicitement par une équation de la forme $F(x,y) = 0$. Cela signifie que $F(x, f(x)) = 0$ pour tout x dans le domaine de définition de f. Si F est différentiable, alors*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

On suppose maintenant que $z = f(x,y)$ est définie implicitement par une équation de la forme $F(x,y,z) = 0$. Cela signifie que $F(x,y,f(x,y)) = 0$ pour tout (x,y) dans le domaine de définition de f. Si F est différentiable et si f'_x et f'_y existent, alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Déf. 15 (Équation du plan tangent). *Équation du plan tangent à une surface définie implicitement par $F(x,y,z) = 0$ en un point (x_0, y_0, z_0).*

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Cette équation est déduite de l'équation $z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ et des dérivations implicites.

Déf. 16 (Dérivée directionnelle). *La dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u} = (a,b)$, notée $f'_{\vec{u}}(x_0,y_0)$ est*

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

si cette limite existe.

Th. 6 (Dérivée directionnelle). *Si f est une fonction différentiable de x et de y, alors f a une dérivée dans la direction de n'importe quel vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b)$ et*

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = f'_x(x, y)a + f'_y(x, y)b$$

Déf. 17 (Gradient). *Si f est une fonction différentiable de x et de y, alors le gradient de f est la fonction vectorielle ∇f ou $\overrightarrow{\text{grad}} f$ définie par*

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(f'_x(x, y), f'_y(x, y)\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\end{aligned}$$

Déf. 18 (Dérivée directionnelle). *En terme de gradient, la dérivée directionnelle dans une direction d'écrit*

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

Déf. 19 (Les fonctions de trois variables). *La dérivée directionnelle se définit de la même manière dans le cas des fonctions de trois variables.*

- *La **dérivée de f en** (x_0, y_0, z_0) **dans la direction d'un vecteur unitaire** $\vec{u} = (a, b, c)$ est*

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

  si cette limite existe.

- *Le **vecteur gradient** d'une fonction f de trois variables, noté ∇f ou $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est*

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(f'_x, f'_y, f'_z\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\end{aligned}$$

- *En terme de gradient, la dérivée directionnelle dans une direction d'écrit également*

$$f'_{\vec{u}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

Propriétés géométriques du gradient

i) En (a, b), f(x, y) croît le plus fortement dans le sens du vecteur gradient $\nabla f(x, y)$. La valeur de plus grand taux de croissance est $||\nabla f(x, y)||$

ii) En (a, b), f(x, y) décroît le plus fortement dans le sens opposée du vecteur gradient $-\nabla f(x, y)$. La valeur de plus grand taux de décroissance est $||\nabla f(x, y)||$

iii) Le taux de variation de $f(x, y)$ est nul dans la direction tangentielle à la courbe de niveau passant par (a, b).

Déf. 20 (Plan tangent aux surfaces de niveau). *Plan tangent à la surface de niveau $F(x,y,z) = k$ en $P(x_0,y_0,z_0)$ ($\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ est un vecteur normal à ce plan)*

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

Déf. 21 (Droite normale). *Droite normale au plan tangent passant par $P(x_0,y_0,z_0)$*

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Déf. 22 (Maximum et minimum local).

— *$f(a,b)$ est la valeur du **maximum local** si pour tout point (x,y) d'un disque centré en (a,b),*

$$f(x,y)\le f(a,b)$$

— *$f(a,b)$ est la valeur du **minimum local** si pour tout point (x,y) d'un disque centré en (a,b),*

$$f(x,y)\ge f(a,b)$$

Th. 7 (Extremum locaux). *Si une fonction f passe par un minimum ou un maximum local en (a,b) et si les dérivées partielles premières de f existent, alors $f'_x(a,b)=0$ et $f'_y(a,b)=0$*

Déf. 23 (Valeurs critiques). *Le couple (a,b) du domaine de la fonction f est dit point critique (ou point stationnaire) si $f'_x(a,b)=0$ et $f'_y(a,b)=0$, ou si l'une de ces dérivées n'existent pas.*

$$\nabla f(a,b)=(0,0)$$

Th. 8 (Test des dérivées secondes). *On suppose que les dérivées partielles secondes de f sont continues sur un disque centré en (a,b) et que $f'_x(a,b)=0$ et $f'_y(a,b)=0$ [c'est-à-dire que (a,b) est un point critique de f].*

Le test des dérivées secondes est basé sur le calcul suivant:

$$\Delta=f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b)-\left[f''_{xy}(a,b)\right]^2$$

a) Si $\Delta>0$ et $f''_{xx}(a,b)>0$, alors f possède un minimum local en (a,b).

b) Si $\Delta>0$ et $f''_{xx}(a,b)<0$, alors f possède un maximum local en (a,b).

c) Si $\Delta<0$, alors alors f possède un point-selle en (a,b).

d) Si $\Delta=0$, on ne peut rien conclure: f peut avoir un maximum local ou un minimum local ou un point-selle en (a,b).

Th. 9 (Théorème des valeurs extrêmes). *Si f est une fonction continue sur un ensemble borné fermé D de $\mathbb{R}^2$, alors f atteint un maximum absolu $f(x_1,y_1)$ et un minimum absolu $f(x_2,y_2)$ en des points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) de D.*

Pour déterminer les valeurs maximales et minimales *absolues* d'une fonction continue f sur un ensemble borné fermé D:

1. calculer les valeurs de f aux points critiques de f dans D;

2. calculer les valeurs extrêmes de f sur la frontière de D;

3. la plus grandes des valeurs issues des étapes 1 et 2 est la valeur maximale absolue; la plus petite de ces valeurs est la valeur minimale absolue.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange (une contrainte) Pour déterminer les valeurs maximales et minimales de $f(x,y,z)$ soumises à la contrainte $g(x,y,z) = k$ (à supposer qu'elles existent)

a) Chercher toutes les valeurs de x, y et z et λ telles que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'_x &= \lambda g'_x \\ f'_y &= \lambda g'_y \\ f'_z &= \lambda g'_z \\ g(x,y,z) &= k \end{cases}$$

b) Calculer la valeur de f en tous les points (x,y,z) repérés à l'étape a). La plus grande de ces valeurs est le maximum de f; la plus petite est le minimum de f.

Remarque: Pour les fonctions de deux variables, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est semblable.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange (deux contraintes) Pour déterminer les valeurs maximales et minimales de $f(x,y,z)$ soumises aux contraintes $g(x,y,z) = k$ et $h(x,y,z) = c$

a) Chercher toutes les valeurs de x, y, z, λ et μ telles que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= k \\ h(x,y,z) &= c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'_x &= \lambda g'_x + \mu h'_x \\ f'_y &= \lambda g'_y + \mu h'_y \\ f'_z &= \lambda g'_z + \mu h'_z \\ g(x,y,z) &= k \\ h(x,y,z) &= c \end{cases}$$

b) Calculer la valeur de f en tous les points (x,y,z) repérés à l'étape a). La plus grande de ces valeurs est le maximum de f; la plus petite est le minimum de f.