8 Analyse combinatoire

8.1 Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui a en autres comme objectif de fournir des moyens de calculs permettant de dénombrer des ensembles finis d'objets concrets ou abstraits obéissant à certaines règles bien précises de formation.

Exemple 8.1

L'ensemble des combinaisons différentes du jeu de loterie 6/49 est un ensemble fini d'objets que l'on peut dénombrer :

Combien y a-t-il de combinaisons différentes à la loterie 6/49 ?

L'analyse combinatoire nous fournit un moyen pour répondre à la question de l'exemple précédent. Ce moyen nous permet d'affirmer rapidement qu'il y a exactement 13 983 816 combinaisons différentes (excluant le numéro complémentaire).

Pour obtenir ce nombre, il n'a pas été nécessaire d'énumérer toutes les combinaisons possibles puis de les avoir compter pour obtenir cette valeur. L'analyse combinatoire nous donne des stratégies de calculs basées sur le principe de multiplication et sur quelques méthodes de dénombrements appelées permutations, arrangements et combinaisons. Ces méthodes permettent justement d'effectuer de tels dénombrements sans avoir à les compter un par un.

8.2 Principe de multiplication

Un échiquier est composé de carrés organisés en 8 rangées et en 8 colonnes. Pour dénombrer le nombres de carrés, nous n'allons pas les compter un à un. Nous ferons plutôt le raisonnement suivant : pour chaque colonne, on trouve 8 carrés. Puisqu'il y a 8 colonnes, il y a donc, au total,

$$8 \times 8 = 64 \text{ carrés}$$

FIG. 5: Échiquier

Définition 1 (Principe de multiplication). *Si une première opération peut être effectuée de n_1 manières différentes, puis,* ***pour chacune de ces n_1 manières****, une seconde opération peut être effectuée de n_2 manières différentes, alors le nombre total de manières d'effectuer ces deux opérations est de*

$$(n_1 \times n_2) \text{ manières}$$

Exemple 8.2

Après un ménage de sa garde-robe, Jacinthe a conservé 4 pantalons et 3 chemisiers. Combien d'agencements différents « pantalon-chemisier » Jacinthe peut-elle alors maintenant porter ?

Solution proposée : Avec chaque pantalon, Jacinthe a le choix d'agencer un chemisier parmi les trois de sa garde-robe. Elle peut donc porter

$$4 \times 3 = 12 \text{ agencements différents.}$$

Le principe de multiplication qui a été appliqué à l'exemple précédent aurait pu être appliqué différemment :

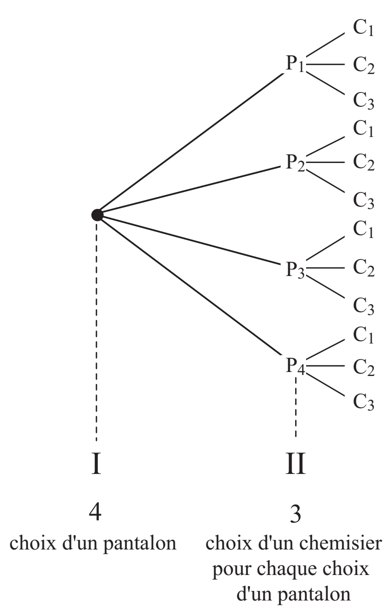
Pour chaque chemisier choisi, Jacinthe a le choix de l'agencer avec un pantalon parmi les quatre.
Elle peut donc porter

$$3 \times 4 = 12 \text{ agencements différents.}$$

Dans un cas comme dans l'autre, il y a le même dénombrement d'agencements différents « pantalon-chemisier » dont Jacinthe peut porter.

8.2.1 Illustration du principe de multiplication

La représentation graphique du principe de multiplication est faite au moyen d'un diagramme en arbre. Un tel diagramme est en fait une manière de décrire explicitement tous les objets que l'ont peut former.



$$\underset{(\text{Opération I})}{\underline{4}} \times \underset{(\text{Opération II})}{\underline{3}} = 12 \text{ agencements}$$

Tout de même, lorsque le principe de multiplication peut être appliqué, il faut éviter l'énumération de toutes les possibilités au moyen d'un tel diagramme afin de les compter. Nous schématiserons plutôt ce diagramme par la disposition suivante de calcul :

$$\underset{(\text{Opération I})}{\underline{n_1}} \times \underset{(\text{Opération II})}{\underline{n_2}} = \text{nombre d'objets formés}$$

L'intérêt que nous avons à schématiser le principe de multiplication est d'autant plus évident lorsque le nombre de manières d'effectuer chaque opération est grand. Il est clair que le dénombrement via un diagramme en arbre s'avérera long et pénible. Encore plus éventuellement, si les objets formés le sont avec plus de deux opérations.

8.3 Principe de multiplication généralisé

Définition 2 (Principe de multiplication généralisé)**.** *Si une première opération peut être effectuée de n_1 manières différentes, puis,* ***pour chacune de ces n_1 manières****, une deuxième opération peut être effectuée de n_2 manières différentes, puis,* ***pour chacune de ces n_2 manières****, une troisième opération peut être effectuée de n_3 manières différentes, et ainsi de suite jusqu'à une k^e opération, alors le nombre total de manières d'effectuer ces k opérations est de*

$$(n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k) \text{ manières}$$

Exemple 8.3

Un restaurant affiche le menu suivant :

POTAGE	ENTRÉE	PLAT PRINCIPAL	DESSERT
• carottes • poireaux • tomates	• escargots • saumon	• poulet • agneau • truite • saucisses	• pouding • fruit

Combien de repas complets différents ce restaurant propose-t-il ?

Solution proposée : La composition d'un repas complet est réalisée en quatre opérations : une opération pour chaque mets à choisir. La première opération n'est pas obligatoirement de choisir un potage. C'est comme dans le cas du dénombrement d'agencements « pantalons-chemisiers », la première opération n'est pas obligatoirement de choisir un pantalon.

Une façon de dénombrer le nombre de repas complets est de considérer les quatre opérations suivantes :

I Choisir une entrée. III Choisir un plat principal.
II Choisir un dessert. IV Choisir un potage.

Reste à calculer le nombre de repas complets.

2	2	4	3
I	II	III	IV

$= 2 \times 2 \times 4 \times 3 = 48$ repas complets

Bien sûr, dans l'exemple précédent, il aurait été plus naturel d'envisager la hiérarchie des opérations suivante :

I Choisir un potage. III Choisir un plat principal.
II Choisir une entrée. IV Choisir un dessert.

3	2	4	2
I	II	III	IV

$= 48$ repas complets

mais, cela n'est pas obligatoire pour dénombrer le nombre de repas complets que la cuisine peut composer. Aucune hiérarchie dans les opérations ne s'impose pour la composition d'un repas (repas $\equiv$ objets formés).

Par contre, dans certains problèmes, de par leurs contraintes ou restrictions, s'impose une hiérarchie à respecter quant à l'ordre des opérations à effectuer. Dans de tels cas, c'est pour **s'assurer de dénombrer le bon ensemble d'objets répondant aux contraintes de formation**. Il faut alors commencer par les opérations associés aux contraintes les plus restrictives, en ordre décroissant de sévérité.

Exemple 8.4

Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres, si ces nombres doivent être des multiples de 5 et s'il n'y a aucun chiffre qui se répète dans le nombre ?

Solution proposée : La formation d'un nombre de quatre chiffres différents est réalisée en quatre opérations : une opération pour chaque chiffre à placer.

I	II	III	IV

Comme multiple de cinq, le nombre doit se terminer par 0 ou par 5 et, comme nombre de quatre chiffres, il ne peut donc pas commencer par 0. Cela nous oblige donc à séparer le dénombrement de tels nombres en deux cas : ceux se terminant par cinq et ceux se terminant par zéro.

Premier cas : les nombres se terminant par 5.

I Placer d'abord le chiffre 5 en position des unités.
II Placer un chiffre à la position des milliers. Ce chiffre doit être différent de 5 et de 0 également.
III Placer un troisième chiffre différent des deux premiers pour les centaines (ou les dizaines).
IV Placer un quatrième chiffre différent des trois premiers pour les dizaines (ou les centaines).

1	8	8	7	= 448 nombres
I	II	III	IV	

Second cas : les nombres se terminant par 0.

I Placer le chiffre 0 en position des unités.
II Placer un chiffre à la position des milliers. Ce chiffre doit être différent de 0.
III Placer un troisième chiffre différent des deux premiers pour les centaines (ou les dizaines).
IV Placer un quatrième chiffre différent des trois premiers pour les dizaines (ou les centaines).

1	9	8	7	= 504 nombres
I	II	III	IV	

Il y a donc au total $448 + 504 = 952$ nombres de quatre chiffres formés de chiffres différents qui sont multiples de cinq.

Remarque : Dans chacun des deux cas de l'exemple précédent, les deux premières opérations doivent être réalisées dans cet ordre car être multiple de cinq est une contrainte forte à respecter d'abord et, ensuite, selon que le nombre formé se termine par cinq ou par zéro, dépendra le nombre de manières de placer ensuite un chiffre pour les milliers. Cela nous a donc amené à distinguer deux cas à dénombrer.

Il ne faut pas être surpris en outre que des contraintes de formation d'un ensemble nous amène à séparer le dénombrement en **deux ou plus de deux cas complémentaires** de telle sorte que ces cas constituent des dénombrements de sous-ensembles disjoints.

Exemple 8.5

En analyse combinatoire, par "mot", on entend une juxtaposition (ordonnée) de lettres, que ce mot ait un sens ou non, en français tout comme dans toute autre langue d'ailleurs. Par exemple, « arbre » est un mot de cinq lettres de même que « brrea » en est un aussi. Autre exemple, « abcccc » est un mot de six lettres. Dans un mot, nous pouvons retrouver des lettres qui peuvent être répéter.

Avec les lettres A, B, C, D, E et F, combien de mots différents de cinq lettres peut-on former

a) au total ?

b) si les répétitions de lettres ne sont pas permises ?

c) si les répétitions de lettres ne sont pas permises et si le mot doit finir par une consonne ?

d) si les répétitions de lettres ne sont pas permises et si le mot doit commencer par deux voyelles ou par deux consonnes ?

Solution proposée :

a) Il y a cinq opérations pour la formation d'un mot de cinq lettres. Il n'y a aucune contraintes à mettre en priorité et les répétitions ne sont pas interdites.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{6} & \boxed{6} & \boxed{6} & \boxed{6} & \boxed{6} \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} = 6^5 = 7776 \text{ mots}$$

b) C'est toujours cinq opérations pour la formation d'un mot de cinq lettres. Il n'y a aucune contraintes à mettre en priorité, mais, maintenant, le répétitions sont interdites.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{6} & \boxed{5} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} = 720 \text{ mots}$$

c) Étant donné la contrainte forte que le mot finisse par une consonne, la première opération est donc de choisir une consonne pour s'assurer de dénombrer que les mots finissant par une consonne. Les quatre opérations restantes consistent à choisir une lettre en s'assurant aucune répétition.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} = 480 \text{ mots}$$

d) Cette contrainte oblige à séparer le dénombrement demandé en deux calculs de dénombrement : soit celui des mots commençant par deux voyelles et soit celui des mots commençant par deux consommes.

l y a toujours cinq opérations à réaliser avec, dans chaque cas, deux opérations à mettre en priorité : choisir une première voyelle (première consonne) et choisir une deuxième voyelle (deuxième consonne) sans répétition. Les trois opérations restantes consistent à choisir une lettre en s'assurant toujours aucune répétition.

v: voyelle
c: consonne
l: lettre

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{ccccc} \text{v} & \text{v} & \text{l} & \text{l} & \text{l} \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} = 28 \text{ mots} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \\ \begin{array}{ccccc} \text{c} & \text{c} & \text{l} & \text{l} & \text{l} \\ \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} = 288 \text{ mots} \end{array}\right\} = 336 \text{ mots}$$

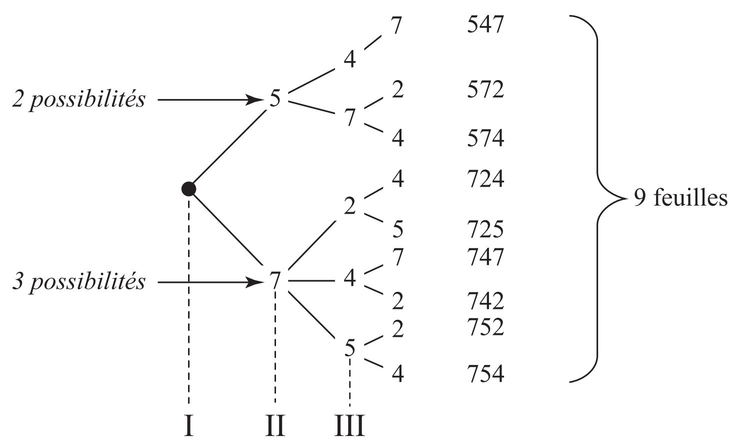
Pour appliquer le principe de multiplication, il faut que la condition de son application soit respectée : il faut vérifier si le nombre de manières d'effectuer un opération est le même **pour chaque manière de faire l'opération précédente**. Sinon, le principe de multiplication ne s'applique pas et il faut précéder autrement pour faire le dénombrement. Le diagramme en arbre pourrait être un moyen adéquat.

Exemple 8.6

Combien de nombres de trois chiffres supérieurs à 546 peut-on former avec les chiffres 2, 4, 5 et 7, si les répétitions ne sont pas permises ?

Solution proposée : Il y a trois opérations pour la formation d'un nombre de trois chiffres. La contrainte forte que le nombre à former soit supérieur à 546, mets en priorité l'opération de placer un premier chiffre parmi les chiffres 5 et 7 pour les centaines. Or, selon que le premier chiffre est 5 ou 7, le nombre de manière d'effectuer la deuxième opération, soit placer un chiffre pour les dizaines, n'est pas le même. En effet, si le premier chiffre est 5, il y a deux possibilités pour le deuxième chiffre, soit un 4 ou un 7, tandis que si le premier chiffre est 7, pour le deuxième chiffre, il y en a trois : 2, 4 et 5. Le principe de multiplication ne s'applique donc pas.

Un diagramme en arbre nous permettra d'énumérer systématiquement tous les nombres possibles. Il ne restera ensuite qu'à compter les feuilles.



Il y a donc 9 nombres de trois chiffres supérieurs à 546 formés avec les chiffres 2, 4, 5 et 7 sans qu'aucun d'entre eux ne se répète.

Exercices suggérés : 1 à 17 à la page 308

8.4 Exercices série 8.1

1. La carte d'un certain restaurant propose 6 hors-d'oeuvre, 4 entrées, 6 plats de viande et 7 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun un de ces 4 plats ?

2. Chacune des 10 questions d'un examen objectif possède 5 choix de réponse. Combien cet examen a-t-il de choix de réponses ?

3. Lors de l'évaluation d'un produit, une association de consommateurs note un produit selon les 3 critères suivants :

   - Facilite d'utilisation (F) : Bonne (F1), Moyenne (F2), Mauvaise (F3) ;
   - Prix (P) : cher (P1), pas cher (P2) ;
   - Coût de maintenance (C) : cher (C1), moyen (C2), pas cher (C3).

   a) Combien y a t-il de possibilités de classement pour un produit donné ?

   b) Faire le diagramme en arbre pour visualiser le principe de multiplication.

4. L'Association internationale du transport aérien (ou AITA, en anglais International Air Transport Association ou IATA) est une organisation commerciale internationale de sociétés de transport aérien. Cette association assigne un code de trois lettres pour identifier le lieux des aéroports dans le monde. Par exemple, YUL identifie l'aéroport international de Montréal. Au mois de septembre 2006, l'AITA avait codifié à l'aide de ce code 9 526 aéroports.

   Combien de codes différents sont possibles ?

5. Un questionnaire comporte 12 questions Vrai/Faux. Combien de questionnaires différents pourraient être éventuellement soumis à la correction par un étudiant

   a) s'il est tenu de répondre à chaque question ?

   b) s'il n'est pas tenu de répondre à chaque question ?

6. Combien de nombres différents composés de 3 chiffres et inférieurs à 500, peut-on former avec les chiffres de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si les répétitions

   a) sont permises ?

   b) ne sont pas permises ?

7. Dans un club de 25 membres, de combien de façons peut-on désigner un président et un vice-president sans qu'il y ait cumule de fonctions ?

8. Le code Morse utilise deux symboles : le point et le trait. Un message est alors représenté par une suite de points et/ou de tirets.

   a) Combien de messages différents est-il possible de former avec une suite de 5 symboles ?

   b) Combien peut-on en former avec une suite d'au plus 5 symboles ?

9. Combien de nombres différents composés de 3 chiffres et plus, peut-on former avec les chiffres de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si les répétitions ne sont pas permises.

10. On retire un as, un roi, une dame et un valet d'un jeu de cartes ordinaire. De combien de façons différentes peut-on retirer ces cartes, si elles doivent être

    a) de couleurs différentes ?

    b) d'une même couleur ?

    c) de n'importe quelle couleur ?

    Remarque : Dans un jeu de cartes ordinaire, les quatre couleurs sont : $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$.

11. Combien de membres au minimum une association doit-elle posséder pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ? (Une initiale est composée de deux lettres.)

12. Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montrent les trois exemples ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?

$$\begin{matrix}\bullet & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ\end{matrix} = \text{a} \qquad \begin{matrix}\circ & \bullet \\ \bullet & \circ \\ \bullet & \circ\end{matrix} = \text{s} \qquad \begin{matrix}\circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ\end{matrix} = \text{espace}$$

13. Un coffre-fort possède trois roulettes numérotées de 1 à 15. Une personne essaie une combinaison au hasard, combien a-t-elle de manières de se tromper ?

14. Il y a cinq routes relient les villes A et B tandis qu'il y en a 4 reliant les villes B et C.
    a) Combien de façons différentes un voyageur peut-il aller de la ville A à la ville C en utilisant ces routes ?
    b) En partant de la ville A, combien d'allers-retours peut-il accomplir s'il ne passe jamais deux fois par la même route ?

15. Avec les lettres du mot TRIANGLE, combien de mots de 8 lettres sans répétition peut-on former commençant par une consonne, se terminant par une voyelle, la lettre R devant être une des 3 premières lettres ?

16. Six personnes A, B, C, D, E, et F se placent en ligne au hasard. Combien d'alignements
    a) peut-il y avoir ?
    b) ont B placé directement en arrière de A ?
    c) ont A et B placés côte à côte ?

17. Un "voyageur" se tient à l'origine sur l'axe des x. Il avance d'une unité à la fois, soit à gauche, soit à droite. Il doit s'arrêter lorsqu'il a atteint 3 ou -3, ou s'il revient à une position déjà occupée (exception faite du 0). Dessiner un arbre pour calculer le nombre de parcours différents possibles de ce "voyageur".

18. Une personne veut jouer à la roulette au plus cinq fois. À chaque partie, elle perd 1$ ou elle gagne 1$. Elle se présente à la première partie avec 1$ en poche . Elle décide d'arrêter de jouer si elle n'a plus rien en poche ou si elle a en poche 4$. Dessiner un arbre pour dénombrer le nombre de possibilités que cette personne a de jouer.

8.5 Les permutations

Il est souvent plus efficace en analyse combinatoire de faire le dénombrement d'un ensemble d'objets en passant par le *calcul des permutations* au lieu d'envisager explicitement l'application du principe de multiplication. C'est pourquoi nous en faisons une méthode de dénombrement.

Définition 3 (Permutation)**.** *Une permutation de n objets est une juxtaposition ordonnée de ces n objets.*

Exemple 8.7

Soit les lettres a, b, c et d. Donner une permutation de ces quatre lettres.

Solution proposée :

$$cbda$$

Voici une petite procédure MAPLE qui affiche toutes les permutations différentes des premières *n* lettres minuscules de l'alphabet.

```
> Permutations:=proc(n::posint)
  local B,permut,t;
  if n>26 then error "entier non accepté car supérieur à 26." fi;
  permut:=proc(n)
   option remember;
   local A,i,j,k;
    A:=[];
    for i from 1 to (n-1)! do
     for j from 1 to n do
      A:=[op(A),[seq(permut(n-1)[i,k], k=1..j-1),n+96,
                  seq(permut(n-1)[i,k], k=j..n-1)]]
     od
    od
    end;
  B:=op(sort(map(t->convert(convert(t,'bytes'),name),permut(n)),lexorder));
  if n=1 then lprint(a) else
    for t from 1 to nops([B]) by (n-1)! do
     lprint(seq(B[k],k=t..t+(n-1)!-1)) od
  fi
  end:
```

À l'aide de cette procédure maison, obtenons toutes les permutations des quatre premières lettres a, b, c et d.

```
> Permutations(4);
abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb
bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba
```

Nous observons dans l'affichage précédent qu'à la première ligne, les permutations débutent par la lettre a, qu'à la deuxième ligne, elles débutent avec la lettre b, à la troisième ligne, la lettre c est en premier et quant à la quatrième ligne, c'est par la lettre d. Aussi, sur chaque ligne, il est affiché 6 permutations de ces lettres.

La question qui se pose assez naturellement est la suivante : combien y a-t-il de dispositions ordonnées de ces 4 lettres ? Autrement dit, combien y a-t-il de permutations différentes de ces 4 lettres ? Nous pouvons très bien compter ces permutations mais là n'est pas la manière de s'y prendre pour répondre à cette question. Nous avons plutôt intérêt à répondre à cette question par un raisonnement propre à l'analyse combinatoire. Imaginer, pour le cas du nombre de permutations des 26 lettres de l'alphabet, on en dénombre

$$403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000$$

Faites donc le calcul du temps que cela prendrait pour compter toutes les permutations à raison de 1 million de permutations à la seconde. Selon la théorie du Big Bang, on estime l'âge de l'actuelle expansion de l'univers à 13,7 milliards d'années environ. Avoir commencé le comptage immédiatement après le Big Bang, ce comptage se terminerait-il cette année ? (Utiliser MAPLE)

C'est le principe de multiplication qui permet de répondre à cette question. Une permutation des lettres a, b, c et d est réalisée en quatre opérations : une opération pour chaque lettre à placer. En effet, nous voyons qu'il y a

I. 4 choix pour placer une première lettre ;
II. pour chaque première lettre placée, il y a 3 choix pour placer une deuxième lettre ;
III. pour chaque deuxième lettre placée, il y a 2 choix pour placer une troisième lettre ;
IV. pour chaque troisième lettre placée, il y a 1 choix pour placer une quatrième lettre ;

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = 4\times 3\times 2\times 1 = 24 \text{ permutations distinctes}$$
$$\begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array}$$

Si on posait maintenant la même question mais avec les 10 premières lettres de l'alphabet. Le principe de multiplication s'applique toujours : une opération pour chaque lettre à placer.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$$
$$\begin{array}{cccccccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \mathrm{VI} & \mathrm{VII} & \mathrm{VIII} & \mathrm{IX} & \mathrm{X} \end{array} = 3\,628\,800 \text{ permutations distinctes}$$

La notation factorielle est utile pour abréger les multiplications d'un entier positif par tous ses prédécesseurs entiers positifs. Par exemple, la réponse précédente $10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ sera abrégée comme suit

$$10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 10!$$

L'écriture 10 point d'exclamation (10!) se lit « factorielle 10 » ou « la factorielle de 10 ».

Théorème 1 (Permutation de n objets distincts)**.** *Le nombre de permutations différentes de n objets distincts, noté P_n, est*

$$P_n = n!$$

Exemple 8.8

Avec toutes les lettres du mot « MATHEUX », combien de mots différents peut-on former ?

Solution proposée : Le mot « MATHEUX » est composé de 7 lettres distinctes. Toute permutation de ces 7 lettres sera aussi un mot de 7 lettres.

Puisque le nombre de permutations distinctes de 7 lettres est $P_7 = 7!$, le nombre de mots différents que l'on peut former est égale à 5 040.

Voyons maintenant quelques exemples de dénombrement dans lesquels interviendra la méthode des permutations combiné avec l'application du principe de multiplication.

Exemple 8.9

De combien de manières 4 livres de mathématiques, 3 de chimie, 3 de physique et 2 de biologie peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres d'un même sujet doivent demeurer ensemble ? (Pour chaque matière, les livres sont différents)

Solution proposée :

Math	Chi	Phy	Bio

Si les sujets doivent être ensemble, toute permutation des blocs de sujets est une manière de ranger les sujets, il y a donc P_4 manières de ranger les sujets.

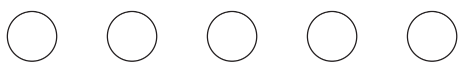
Ensuite, pour chaque tel rangement de sujets, nous devons tenir compte des permutations des livres de mathématiques entre-eux, celles de chimie entre-eux, celles de physique entre-eux et celles de biologie entre-eux. Il a donc au total

$$P_4P_4P_3P_3P_2 = 4!4!3!3!2! = 41\,472$$

manières de ranger tous ces livres sur une étagère.

Exemple 8.10

De combien de manières différentes peut-on faire asseoir 5 personnes dont 3 hommes et 2 femmes si les 5 sièges d'une rangée doivent être tous occupés.



a) au total ?
b) si 2 hommes doivent occuper les extrémités de cette rangée ?
c) si les hommes et les femmes doivent alterner ?
d) si les deux femmes doivent être voisines ?
e) si les deux femmes ne doivent jamais être voisines ?

a) Toute permutation de ces 5 personnes assises à ces places est une manière d'occuper les 5 sièges de cette rangée. Puisqu'il y a P_5 permutations distinctes, il y a donc au total

$$P_5 = 5! = 120$$

manières d'occuper les 5 sièges.

b) Une manière de les faire asseoir de sorte que les deux extrémités soient occupées par les hommes est réalisée en trois opérations :
   I. placer un homme à l'une des extrémités de la rangée ;
   II. pour chaque premier homme ainsi placé, placer un deuxième homme à l'autre extrémité ;
   III. pour chaque deuxième homme ainsi placé, il y a P_3 manières de faire asseoir les 3 personnes restantes. Il y a donc

$$\underset{\text{I}}{\boxed{3}}\underset{\text{II}}{\boxed{2}}\underset{\text{III}}{\boxed{P_3}} = 3\times 2\times 3! = 36$$

manières différentes de faire asseoir 3 hommes et 2 femmes si 2 hommes doivent occuper les extrémités de la rangée.

c) Il n'y a qu'une seule configuration où les 3 hommes et les 2 femmes sont en alternance.

$$H_3 \quad F_2 \quad H_1 \quad F_1 \quad H_2$$

Une manière de les faire asseoir en alternance est réalisée en deux opérations :

I. faire une permutation des hommes (ou les femmes selon) entre eux

II. pour chaque permutation des hommes (ou les femmes selon) entre eux, faire une permutation des femmes (hommes) entre-elles. Il y a donc

$$\begin{array}{|c|c|} \hline P_3 & P_2 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\text{I}} & \multicolumn{1}{c}{\text{II}} \end{array} = 3! \times 2! = 12$$

manières différentes de faire asseoir 3 hommes et 2 femmes en alternance.

d) Pour s'assurer que les 2 femmes soit voisines, asseyons-les sur 2 sièges adjacents et les 3 hommes sur les 3 autres sièges.

$$H_2 \quad F_2 - F_1 \quad H_3 \quad H_1$$

Une manière de les faire asseoir de sorte que les deux femmes soient voisines est réalisée en deux opérations :

I. faire une permutation de ces 4 "sièges redéfinis" et

II. pour chaque permutation de ces 4 "sièges redéfinis", faire une permutation des 2 femmes (elles demeureront quant même voisines). Il y a donc

$$\begin{array}{|c|c|} \hline P_4 & P_2 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\text{I}} & \multicolumn{1}{c}{\text{II}} \end{array} = 4! \times 2! = 48$$

manières de faire asseoir 3 hommes et 2 femmes de sorte que les 2 femmes soient voisines.

e) Soustrayons le nombre de manières où elles sont voisines calculé en d) du nombre de manières de les faire asseoir calculé en a). Il y a donc

$$5! - 4!2! = 120 - 48 = 72$$

manières de faire asseoir 3 hommes et 2 femmes de sorte que les 2 femmes ne soient jamais voisines.

Les solutions de l'exemple précédent sont plutôt élaborées. Cela peut donner l'impression que la résolution de problèmes de dénombrement est un tantinet laborieux. En fait, ce qu'il faut réaliser, c'est qu'à la base, c'est toujours le principe de multiplication qui est appliqué : le calcul de permutations lui-même a seulement permis d'établir le nombre de possibilités pour la réalisation d'une opération donnée.

L'exemple suivant est plus économe quant aux détails de la solution mais est suffisamment complet permettant de détailler un raisonnement combinatoire correct.

Exemple 8.11

Avec les lettres du mot « TRIANGLE », combien de mots différents de 8 lettres peut-on former

a) au total ?

b) si les voyelles doivent être ensemble ?

c) si les voyelles doivent être ensemble de même que les consonnes ?

d) si les lettres I et E ne doivent jamais être voisines ?

e) si la lettre A doit être à la première ou à la troisième position dans le mot ?

Solution proposée : Constatons d'abord que le mot « TRIANGLE » est composé de 8 lettres toutes différentes dont 3 voyelles et 5 consonnes.

a) Toute permutation de ces 8 lettres à la fois est une manière de former un mot de 8 lettres. Puisqu'il y a P_8 permutations distinctes, il y a donc au total

$$P_8 = 8! = 40\,320$$

mots différents que l'on peut former.

b) D'une part, considérons les 3 voyelles formant un premier bloc et, d'autre part, chacune des 5 consonnes comme autant de blocs. Pour former un mot de 8 lettres de sorte que les voyelles demeurent ensemble, nous ferons deux opérations : la première opération, permuter les 6 blocs, et la seconde, pour chaque permutation des 6 blocs, permuter les voyelles dans leur bloc. Alors, nous avons au total

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{\mathrm{P}_6}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{\mathrm{P}_3}} = 6! \times 3! = 4\,320$$

mot différents de 8 lettres dont les voyelles sont ensemble.

c) D'une part, considérons les 3 voyelles formant un premier bloc et, d'autre part, les consonnes formant un second bloc. Pour former un mot de 8 lettres de sorte que les voyelles et les consonnes demeurent ensemble, nous ferons trois opérations : la première opération, permuter les 2 blocs, la deuxième opération, pour chaque permutation des 2 blocs, permuter les voyelles dans leur bloc et finalement, la troisième opération, permuter les consonnes dans leur bloc. Alors, nous avons au total

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{\mathrm{P}_2}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{\mathrm{P}_3}}\underset{\mathrm{III}}{\boxed{\mathrm{P}_5}} = 2! \times 3! \times 5! = 1\,140$$

mot différents de 8 lettres dont les voyelles et les consonnes sont ensembles.

d) Du nombre total de mots que l'on peut former, soustrayons tous les mots ayant les lettres I et E voisines. Il a donc

$$P_8 - \underset{\mathrm{I}}{\boxed{\mathrm{P}_7}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{\mathrm{P}_2}} = P_8 - 7! \times 2! = 30\,240$$

mots différents dont les lettres I et E ne sont pas voisines.

e) Notons qu'il y a autant de mots où la lettre A occupe la première position que de mots où elle occupe la troisième.

Plaçons la lettre A à la première position, puis, toute permutation des 7 autres lettres constitueront autant de mots différents de 8 lettres. Il y a donc au total

$$P_7 \times 2 = 7! \times 2 = 10\,080$$

mots différents tels que la lettre A occupe la première ou la troisième position.

Nous avons affirmer, à la page 311, que pour le cas du nombre de permutations des 26 lettres de l'alphabet, on en dénombrait 403 291 461 126 605 635 584 000 000. En effet, ce nombre correspond au nombre de permutations de 26 objets distincts, soit $P_{26} = 26!$.

```
> '26!'=26!;
```

$$26! = 403291461126605635584000000$$

8.5.1 La notation factorielle

Au cours des prochaines sections, nous serons amené à simplifier des écritures mathématiques renfermant des notations factorielles. Nous allons donc présenter ici quelques éléments de calculs avec la notation factorielle.

Donnons d'abord la définition récursive de la factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$.

Définition 4 (Factorielle n). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (un nombre naturel non nul). Factorielle n, notée $n!$ est définie par*

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ n! = n \times (n-1)!, \ n>1. \end{cases}$$

Par convention, ajoutons l'égalité

$$0! = 1$$

Cette définition récursive de factorielle n permet de retrouver la multiplication de tous les nombres naturels de 1 à n qui a permis l'introduction de cette notation à la page 311 :

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1)! \\ &= n \times (n-1) \times (n-2)! \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)! \\ &\vdots \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

Exemple 8.12

Calculer 6!.

Solution proposée :

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \times 5! \\ &= 6 \times 5 \times 4! \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3! \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

À l'avenir, la factorielle d'un nombre sera donnée directement comme le produit du nombre lui-même multiplié par tous ses prédécesseurs entiers sans appliquer rigoureusement la définition récursive. Par exemple

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

La définition récursive de la factorielle permet de développer la factorielle jusqu'à une factorielle désirée. Par exemple, 8 ! peut être développée jusqu'à 5 !.

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$$

Similairement, $n!$ peut être développée jusqu'à $(n-r)!$.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)(n-r)!$$

Nous verrons un peu plus loin, en quoi la convention $0! = 1$ permet à certaines formules de dénombrement d'être valides lorsqu'elles font apparaître la factorielle de 0 : $0!$.

Le tableau ci-dessous, donnant la valeur des quinze premières factorielles, donne une bonne idée de la croissance de $n!$, laquelle croissance semble plus rapide que toute autre croissance exponentielle.

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 880
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 000

TAB. 4: Tableau des premières factorielles

La définition récursive de la factorielle nous facilitera la tâche dans la simplification des calculs.

Exemple 8.13

Simplifier a) $\dfrac{10!}{7!}$ b) $\dfrac{9!+8!}{8!-4\cdot 7!}$ c) $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}$

Solution proposée : Inutile de développer chaque factorielle jusqu'à l'unité. Appliquons plutôt la définition récursive de la factorielle pour développer une factorielle donnée jusqu'à une certaine factorielle permettant de faire une simplification.

a) $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!} = \dfrac{10\times 9\times 8\times \cancel{7}!}{\cancel{7}!} = 720$

b) $\dfrac{9!+8!}{8!-4\cdot 7!} = \dfrac{(9\times 8\times 7!)+(8\times 7!)}{(8\times 7!)-(4\cdot 7!)} = \dfrac{\cancel{7}!(9\times 8+8)}{\cancel{7}!(8-4)} = 20$

c) $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n+1)n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^3-n$

Exercices suggérés : 1 à 10 à la page 318

8.5.2 L'extension MAPLE `combinat`

Terminons cette section en présentant l'extension MAPLE `combinat`. Cette extension propose plusieurs macro-commandes propres à l'analyse combinatoire. On en retrouve 33 avec MAPLE 11.

```
> with(combinat);
Warning, the protected name Chi has been redefined and unprotected
```

$[Chi, bell, binomial, cartprod, character, choose, composition, conjpart, decodepart, encodepart, firstpart, graycode, inttovec, lastpart, multinomial, nextpart, numbcomb, numbcomp, fibonacci, numbpart, numbperm, partition, permute, powerset, prevpart, randcomb, randpart, randperm, setpartition, stirling1, stirling2, subsets, vectoint]$

À la place de la procédure maison Permutations donnée à la page 310, nous aurions pu utiliser la macro-commande `permute` de cette extension.

```
> P:=permute([a,b,c,d]);
```

$P := [[a,b,c,d],[a,b,d,c],[a,c,b,d],[a,c,d,b],[a,d,b,c],[a,d,c,b],[b,a,c,d],[b,a,d,c],[b,c,a,d], [b,c,d,a],[b,d,a,c],[b,d,c,a],[c,a,b,d],[c,a,d,b],[c,b,a,d],[c,b,d,a],[c,d,a,b],[c,d,b,a], [d,a,b,c],[d,a,c,b],[d,b,a,c],[d,b,c,a],[d,c,a,b],[d,c,b,a]]$

Il faut travailler tout de même un peu pour avoir une disposition dans l'affichage plus commode à lire (à décoder).

```
> n:=nops(op(1,P)):
  for t from 1 to nops(P) by (n-1)!
   do
    print(seq(P[k],k=t..t+(n-1)!-1))
   od;
```

$$[a,b,c,d],[a,b,d,c],[a,c,b,d],[a,c,d,b],[a,d,b,c],[a,d,c,b]$$

$$[b,a,c,d],[b,a,d,c],[b,c,a,d],[b,c,d,a],[b,d,a,c],[b,d,c,a]$$

$$[c,a,b,d],[c,a,d,b],[c,b,a,d],[c,b,d,a],[c,d,a,b],[c,d,b,a]$$

$$[d,a,b,c],[d,a,c,b],[d,b,a,c],[d,b,c,a],[d,c,a,b],[d,c,b,a]$$

Un aspect intéressant de cette macro-commande, c'est qu'elle peut prendre en charge les éléments que l'on désire permuter.

```
> P:=permute([1,2,3]);
```

$$P := [[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]]$$

La macro-commande `numbperm` dénombre le nombre de permutations différentes des éléments de la liste donnée.

```
> numbperm([a,b,c,d]);
```

$$24$$

Lorsque l'argument de la macro-commande `numbperm` est un nombre naturel, le résultat est le nombre de permutations d'objets **distincts** correspondant à ce nombre naturel.

```
> numbperm(4);
```

$$24$$

8.6 Exercices série 8.2

1. Réduire chaque expression à une écriture sans notation
   a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ b) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$ c) $\dfrac{n!+(n+1)!}{(n-1)!+n!}$

2. Réduire chaque expression à une expression factorielle simple.
   a) $(n+1)n!$
   b) $\dfrac{(n+7)!}{(n+7)}$
   c) $(n-r+1)(n-r)!$
   d) $\dfrac{(n!)^2}{n(n-1)(n-2)!}$
   e) $\dfrac{(n-r+1)!}{(n-r+1)(n-r)(n-r-1)}$

3. Simplifier.
   a) $\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!}$
   b) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$
   c) $\dfrac{(n-2)!}{(n-1)!}$
   d) $\dfrac{(n!)^2}{(n-2)!(n+1)!}$
   e) $\dfrac{(n-1)!-n!}{n!+(n-1)!}$
   f) $\dfrac{n!-(n-1)(n-1)!}{(n-1)n!-(n-1)!}$

4. Montrer que
   a) $\dfrac{[(2n)!]^2}{(2n-1)!(2n+1)!}=\dfrac{2n}{2n+1}$
   b) $\dfrac{(n+1)!}{n!}-\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!}=2$
   c) $\dfrac{r(n-1)!}{(n-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

5. Résoudre pour n chaque équation.
   a) $\dfrac{n!}{(n-4)!}=\dfrac{20n!}{(n-2)!}$
   b) $n!=(n-2)!$
   c) $n!=12\sqrt{n!-20}$
   d) $n!-7+\dfrac{6}{n!}=0$

6. Une équipe de recherche veut étudier l'influence de l'ordre de la prise de quatre médicaments sur l'efficacité d'un traitement constitué par ces quatre produits. De combien de façons possibles l'équipe de recherche peut-elle planifier ce traitement ?

7. Quatre Américains, trois Français et cinq Italiens doivent s'asseoir sur un même banc. Combien y a t-il de dispositions si les gens d'une même nationalité doivent rester ensemble ?

8. De combien de façons différentes un contremaître peut-il assigner huit personnes à huit tâches différentes si l'une de ces personnes est incapable d'effectuer l'une ou l'autre des deux premières tâches ?

9. Douze personnes dont André doivent se mettre en file. Combien y a-t-il de façons de le faire
   a) au total ?
   b) si on veut qu'André occupe la position de tête ?
   c) si on veut qu'André occupe la position de queue ?
   d) si on veut qu'André occupe l'une des trois premières positions ?

10. Les douze tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard sur une étagère.
    a) Combien y a-t-il de manières de ranger ces tomes ?
    b) Parmi ces rangements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte (dans cet ordre) ?

11. Les n tomes d'une encyclopédie sont disposés "au hasard" sur une étagère.
   a) De combien de façon peuvent être rangés ces n tomes ?
   b) Parmi ces rangements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

12. Trois paires de vrais jumeaux seront étudiés dans un laboratoire de psychologie du rêve. Ce laboratoire dispose de trois chambres à deux lits et il a été entendu de placer chaque paire de jumeaux dans une même chambre et de leur assigner à chacun un lit bien déterminé.

   De combien de manières peut-on s'y prendre ?

13. a) De combien de façons peut-on asseoir en rang trois garçons et trois filles ?
   b) Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi.
   c) Même question si seuls les garçons doivent rester ensemble.
   d) Même question si deux personnes de même sexe ne doivent jamais être voisins.
   e) Même question si Pierre et Francine doivent être voisins.

14. De combien de façons dix personnes peuvent-elles se placer
   a) en une rangée ?
   b) autour d'une table ronde ?

15. On dispose de sept pots de peinture : blanc, noir, rouge, jaune, bleu, vert et brun. On désire peinturer sept cercles concentriques en utilisant toutes les couleurs.

   De combien de manières différentes peut-on le faire
   a) si le noir et le blanc doivent être côte à côte mais le noir peinturant le plus grand cercle ?
   b) si le noir et le blanc ne doivent jamais être côte à côte ?

16. Lors de la finale du 100m des mondiaux d'athlétisme huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont américains. Les trois premiers arrivés montent sur le podium **dans leur ordre d'arrivée**.
   a) Combien y a-t-il de podiums possibles ?
   b) Combien y a-t-il de podiums cent pour cent américains ?
   c) Combien y a-t-il de podiums comprenant au moins un américain ?
   d) Combien y a-t-il de podiums comprenant exactement deux américains ?

17. On demande au célèbre ténor napolitain Papa Rotti, d'interpréter huit compositions de son choix à une certaine soirée bénéfice. Le ténor choisit d'interpréter deux œuvres d'Éduardo di Capua (1865-1917), deux œuvres d'Alfredo Catalani (1854-1893), deux œuvres de Sir Francesco Paolo Tosti (1846-1916) et deux œuvres de Luigi Denza (1846-1922).

   De combien de manières différentes le ténor peut-il faire sa prestation s'il désire
   a) commencer par une œuvre de Tosti et finir avec une œuvre de Capua ?
   b) chanter consécutivement les deux œuvres de chaque compositeur ?
   c) que les quatre premières chansons soient de compositeurs différents ?

8.7 Permutations d'objets non tous distincts

Rappelons la définition d'une permutation : une permutation de n objets pris à la fois est une disposition ordonnée de ces n objets.

Dans cette définition, il n'a jamais été question que les n objets soient tous des objets distincts. Nous pouvons très bien être intéressé à dénombrer le nombre de permutations différentes (discernables) de n objets non tous distincts.

Par exemple, combien y a-t-il de permutations discernables des lettres A, A, A et B ?

```
> numbperm([A,A,A,B]);
```

$$4$$

Tandis que le nombre de permutations discernables de quatre objets distincts est donné par $P_4 = 4! = 24$, il n'y a que quatre permutations discernables des lettres A, A, A et B. En effet

```
> permute([A,A,A,B]);
```

$$[[A,A,A,B],[A,A,B,A],[A,B,A,A],[B,A,A,A]]$$

Qu'en est-il, par exemple, du nombre de mots différents que l'on peut former avec toutes les lettres du mot MISSISSIPPI ? Il y a autant de mots différents qu'il y a de permutations discernables des lettres du mot MISSISSIPPI. Il nous faut donc mettre au point un raisonnement combinatoire pour dénombrer toutes les permutations discernables.

Considérons de nouveau les lettres A, A, A et B. Distinguons momentanément les A entre eux par A1, A2 et A3 et obtenons toutes les permutations différentes des "lettres" A1, A2, A3 et B.

```
> P:=permute([A1,A2,A3,B]):
  n:=nops(op(1,P)):
  for t from 1 to nops(P) by (n-1)!
   do
    print(seq(P[k],k=t..t+(n-1)!-1))
   od;
```

$$[A1,A2,A3,B],[A1,A2,B,A3],[A1,A3,A2,B],[A1,A3,B,A2],[A1,B,A2,A3],[A1,B,A3,A2]$$
$$[A2,A1,A3,B],[A2,A1,B,A3],[A2,A3,A1,B],[A2,A3,B,A1],[A2,B,A1,A3],[A2,B,A3,A1]$$
$$[A3,A1,A2,B],[A3,A1,B,A2],[A3,A2,A1,B],[A3,A2,B,A1],[A3,B,A1,A2],[A3,B,A2,A1]$$
$$[B,A1,A2,A3],[B,A1,A3,A2],[B,A2,A1,A3],[B,A2,A3,A1],[B,A3,A1,A2],[B,A3,A2,A1]$$

Les permutations discernables se terminant par B

$$[A1,A2,A3,B],[A2,A1,A3,B],[A1,A3,A2,B],[A3,A1,A2,B],[A2,A3,A1,B],[A3,A2,A1,B]$$

deviennent indiscernables si nous ne distinguons plus les lettres A entre-elles.

$$[A,A,A,B],[A,A,A,B],[A,A,A,B],[A,A,A,B],[A,A,A,B],[A,A,A,B]$$

Nous comptons alors 6 permutations indiscernables, soit le nombre de permutations des lettres A_1, A_2 et A_3. Autrement dit, il y en a autant de permutations indiscernables se terminant par B qu'il y a de permutations des lettres A, soit $P_3 = 6$.

P_4 étant le nombre de permutations différentes de 4 objets distincts, il suffit de diviser ce nombre par le nombre de permutations des trois lettres A pour dénombrer le nombre de permutations discernables

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

C'est tout à fait le même raisonnement que l'on va appliquer au dénombrement du nombre de permutations discernables des lettres du mot ABBTTT.

Comme il y a 6 lettres dans ce mot, il y aurait P_6 permutations si ces 6 lettres étaient distinctes. Or, il y a 2 lettres B et 3 lettres T. Alors, pour obtenir le nombre de permutations discernables des lettres du mot ABBTTT, divisons P_6 par P_2, soit le nombre de permutations des deux lettres B, et divisons encore par P_3, soit le nombre de permutations des trois lettres T :

$$\frac{\frac{P_6}{P_2}}{P_3} = \frac{P_6}{P_2 \times P_3} = \frac{6!}{2! \times 3!} = \frac{720}{2 \times 6} = 60$$

Il y a donc 60 permutations discernables des lettres du mots ABBTTT. Voyons voir avec MAPLE.

```
> numbperm([A,B,B,T,T,T]);
                                  60
```

MAPLE est aussi bon que nous !

Théorème 2 (Permutation de n objets non tous distincts)**.** *Le nombre de permutations discernables de n objets non tous distincts tels que*

n_1 objets constituent un 1^er^groupe d'objets identiques,

n_2 objets constituent un 2^e^groupe d'objets identiques,

n_3 objets constituent un 3^e^groupe d'objets identiques,

$\vdots$

n_k objets constituent un k^e^groupe d'objets identiques,

noté par $P_{n;n_1,n_2,\ldots,n_k}$, est

$$P_{n;n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!} \text{ où } n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n.$$

Exemple 8.14

Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot « MISSISSAUGA »

a) au total ?

b) si les mots commencent avec S ?

c) si les S doivent être ensemble ?

d) si les S doivent être séparés ?

e) si toutes les consonnes doivent être voisines de même que toutes les voyelles ?

f) si le mot commence avec une voyelle ?

Solution proposée : Constatons d'abord que le mot « MISSISSAUGA » est composé de 11 lettres dont 6 consonnes (1-M, 4-S, 1-G) et 5 voyelles (2-A, 2-I, 1-U).

a) Toute permutation discernable de ces 11 lettres est un mot différent. Il y donc

$$P_{11;1,4,1,2,2,1} = \frac{11!}{1!4!1!2!2!1!} = 415\,800$$

mots différents que l'on peut former.

```
> numbperm([M,I,S,S,I,S,S,A,U,G,A]);
                                    415800
```

b) Pour que le mot commence avec un S, il suffit de prendre un S pour débuter le mot. Lui adjoindre ensuite toute permutation discernable des 10 lettres restantes. Il y a donc

$$P_{10;1,3,1,2,2,1} = \frac{10!}{1!3!1!2!2!1!} = 151\,200$$

mots différents que l'on peut former commençant avec la lettre S.

```
> numbperm([M,I,S,I,S,S,A,U,G,A]);
                                    151200
```

c) Il suffit de considérer les quatre S en tant que bloc formant un seul objet. Ainsi, nous nous retrouvons à dénombrer les permutations discernables d'une nouvelle liste de 8 d'objets encore non tous distincts : 1-M, 1-G, 2-A, 2-I, 1-U et le bloc de S. Il y a donc

$$P_{8;1,1,2,2,1,1} = \frac{8!}{1!1!2!2!1!1!} = 10\,080$$

mots différents que l'on peut former de telle manière que les S demeurent ensemble.

```
> numbperm([M,G,A,A,I,I,U,SSSS]);
                                    10080
```

d) Un mot dont les S sont séparés est un mot dans lequel on ne retrouve aucun S voisin. Il faut donc d'abord dénombrer le nombre de mots où aucun S n'est immédiatement voisin d'un autre S. Voici un exemple d'un tel mot :

MSIISASUGAS

Puis, il faut dénombrer, pour chaque tel mot, le nombre de permutations discernables des lettres autres que les S.

Le raisonnement combinatoire qui permet de dénombrer le nombre de tels mots vous sera présenté seulement à la prochaine section. Il n'est pas question non plus d'énumérer toutes les mots possibles pour ensuite les compter pour en dénombre le nombre. Pour le moment, acceptons le fait qu'il y a exactement 70 mots où l'on retrouve aucun S voisin. En acceptant ce nombre 70, il y a donc

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{70}}\;\underset{\mathrm{II}}{\boxed{P_{7;1,1,2,2,1}}} = 70\,\frac{7!}{1!1!2!2!1!} = 88\,200$$

mots différents que l'on peut former dans lesquels aucun S n'est voisin.

```
> 70*numbperm([M,G,A,A,I,I,U]);
```

88200

e) Il y a que deux configurations où les consonnes sont ensembles ainsi que les voyelles : c'est d'avoir dans le mot les 6 consonnes d'abord suivi des 5 voyelles ou bien d'avoir les 5 voyelles suivi des 6 consonnes. Puis, pour chaque configuration, dénombrer le nombre de permutations discernables des consonnes et des voyelles. Il y a donc

$$\underset{\text{I}}{\boxed{P_2}}\;\underset{\text{II}}{\boxed{P_{6;4,1,1}}}\;\underset{\text{III}}{\boxed{P_{5;2,2,1}}} = 2!\,\frac{6!}{4!1!1!}\,\frac{5!}{2!2!1!} = 1800$$

mots différents que l'on peut former où dans lesquels les consonnes et les voyelles sont ensembles.

```
> 2!*numbperm([S,S,S,S,G,M])*numbperm([A,A,I,I,U]);
```

1800

f) Puisque parmi les 11 lettres il y a 5 voyelles, les $\frac{5}{11}$ des mots calculés en a) sont donc des mots commençant par une voyelle. Il y a donc

$$\frac{5}{11} \times 415\,800 = 151\,200$$

mots commençant par une voyelle.

Dans un dictionnaire, on donne la définition suivante. Une anagramme est le résultat de la permutation des lettres d'un ou plusieurs mots de manière à produire d'autres mots qui ont un sens. Par exemples, niche est une anagramme de chien et «révolution française» est une anagramme de «un véto corse la finira».

Par contre, en analyse combinatoire, nous entendons par mot une disposition ordonnée de lettres, que cette disposition ait un sens ou non en français ou en tout autre langue envisagée. Alors, une anagramme sera un mot obtenu par la permutation des lettres, que le mot obtenu ait un sens ou non. Ainsi, en analyse combinatoire, nchie est une anagramme de chien.

Exemple 8.15

Dans combien d'anagrammes du mot MATHEUX est-ce que les voyelles apparaissent dans l'ordre alphabétique ?

Solution proposée : Dans le mot MATHEUX il y a trois voyelles différentes et quatre consonnes différentes. Pour dénombrer le nombre d'anagrammes dans lesquelles les voyelles apparaissent en ordre alphabétique, il suffit de traiter ces voyelles comme une même lettre qui se répète trois fois mais différente, bien sûr, des autres lettres composant le mot MATHEUX. De cette manière, on ne comptera pas les permutations de ces voyelles. Il y a donc

$$P_{7;3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!\;1!\;1!\;1!\;1!} = 840$$

anagrammes du mot MATHEUX dans lesquelles les voyelles apparaissent en ordre alphabétique.

```
> numbperm([M,A,T,H,A,A,X]);
```

$$840$$

Exemple 8.16

On lance une pièce de monnaie 11 fois. Combien de manières différentes peut-on obtenir 5 piles ?

Solution proposée : Voici un exemple de résultat d'une suite ordonnée de 11 pile (P) ou face (F) où nous comptons 5 piles

P P P P P F F F F F F

Pour dénombrer le nombre de résultats dans lesquels on compte 5 piles, il suffit de dénombrer le nombre de permutations discernables de P P P P P F F F F F F. Il y a donc

$$P_{11;5,6} = \frac{11!}{5!\,6!} = 462$$

résultats dans lesquels apparaissent 5 piles.

Question : Dans le contexte de l'exemple précédent, est-ce que le nombre de manières d'obtenir 6 faces en lançant 11 fois la pièce de monnaie est également 462 ?

Nous pouvons généraliser la situation précédente.

Le nombre de permutations discernables de n objets tels que

r objets constituent un premier groupe d'objets identiques et

$n-r$ objets constituent un second groupe d'objets identiques

est donné par

$$P_{n;r,n-r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

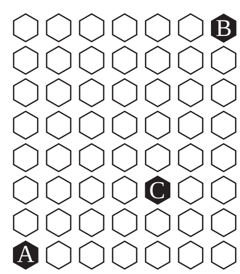
Exercices suggérés : 1 à 11 à la page 325

8.8 Exercices série 8.3

1. Combien de nombres différents sont obtenus en permutant les chiffres du nombre 3 557 735 ?
2. Combien de mots différents obtient-on en permutant les lettres du mot VIVIFIANT ?
3. Combien y a-t-il de façons d'aligner trois signes plus "+" et six signes moins "–" ?
4. Si chaque enfant doit recevoir un seul album, de combien de manières peut-on distribuer à dix enfants
   a) quatre exemplaires d'« Astérix le Gaulois » et six exemplaires de « Tintin en Amérique » ?
   b) quatre exemplaires d'« Astérix le Gaulois » et 7 exemplaires de « Tintin en Amérique » ?
5. Sur une même étagère, on retrouve trois exemplaires de quatre livres différents. Combien y a-t-il de façons de les placer sur cette étagère ?
6. Combien de nombres supérieurs à 1 000 000 mais inférieur à 5 000 000 peut-on former à l'aide des chiffres du nombre 2 343 203 ?
7. À partir des lettres du mot MISSISSIPPI, combien de mots différents de onze lettres peut-on former
   a) si aucune restriction n'est posée ?
   b) si les I doivent être ensemble ?
   c) si les I doivent être ensemble et les S séparées ?
   d) si les mots doivent débuter avec une consonne ?
8. Quel est le nombre de permutations des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 dans lesquelles les chiffres impairs demeurent en ordre croissant ?
9. À la fin de la première période, le pointage est

   Canadien 4, Toronto 4

   De combien de façons différentes ce pointage à la fin de la première période aurait-il pu se faire ?
10. On lance une pièce de monnaie neuf fois. Combien de manières différentes pouvons-nous
    a) obtenir 4 piles ?
    b) ne pas obtenir 4 piles ?
11. Un jardinier japonais doit se déplacer de la pierre A à la pierre B en se déplaçant sur les pierres soit vers la droite ou vers le haut sans jamais revenir sur ses pas.
    a) Combien de chemins lui sont possibles ?
    b) Même question mais le jardinier doit absolument passer sur la pierre C ?



8.9 Arrangements et combinaisons d'objects distincts

Les arrangements et des combinaisons sont deux autres autres méthodes de calcul que nous donne l'analyse combinatoire pour faire le calcul d'un dénombrement.

Définition 5 (Arrangement)**.** *On appelle arrangement de r objets pris dans un ensemble de n objets distincts toute disposition ordonnée de ces r objets.*

Exemples 8.17

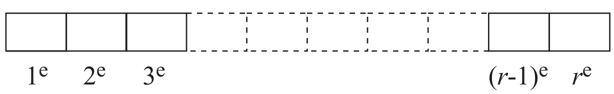
Le mot CRIS est un arrangement de 4 lettres pris parmi les lettres du mot CARDIOS. Notez que toutes les lettres de ce mot sont distinctes.

Dans un arrangement, il est possible de voir certains objets être répétés.

À partir des lettres du mot CARDIOS, les mots COCO et CRIS sont deux arrangements avec répétitions de 4 lettres. Bien que les répétitions soient permises dans un même mot, il peut ne pas en avoir dans le mot.

À partir des symboles 0 et 1, la séquence 1011001 est un arrangement avec répétitions de 7 symboles composé avec les symboles 0 et 1.

À l'aide du principe de multiplication, nous allons déduire une formule générale permettant de dénombrer le nombre total d'arrangements de r objets dont les objets sont pris dans un ensemble de n objets distincts. Nous devons distinguer deux cas, selon qu'on admet ou non les répétitions mais, dans un cas comme dans l'autre, un arrangement de r objets est réalisé en r opérations.



8.9.1 Arrangements

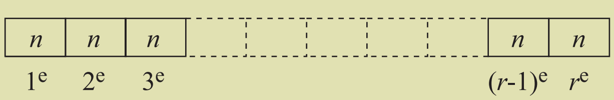
Théorème 3 (Arrangements avec répétitions)**.** *Un arrangement avec répétitions de r objets dont les objets sont pris dans un ensemble de n objets distincts est réalisé en r opérations :*

1) *Placer le premier objet.*
2) *Placer le deuxième objet.*
3) *Placer le troisième objet.*

⋮

r-1) *Placer le (r-1)^{e}objet.*

r) *Placer le r^{e}objet.*



$$= \overbrace{n \times n \times n \times \ \dots \ \times n \times n}^{r \text{ facteurs}}$$

Il y a donc n^r arrangements avec répétitions.

Exemple 8.18

Trois jours de suite, M. Lévesque doit se rendre à la gare Centrale. Il peut s'y rendre de cinq façons : en métro, en auto, en autobus, en vélo ou en moto. De combien de façons différentes peut-il faire le trajet pendant ces trois jours consécutifs ?

Solution proposée : M. Lévesque peut très bien se rendre à la gare Centrale en utilisant le même moyen de transport ou un moyen différent de celui utilisé la veille. Il s'agit donc d'un arrangement, avec répétitions, de 3 moyens de transports parmi les 5. Il y a donc

$$5^3 = 125$$

façons différentes de faire le trajet durant ces trois jours consécutifs.

Exemple 8.19

On lance une pièce de monnaie n fois de suite. Combien y a-t-il de résultats ?

Solution proposée : En envisageant un des résultats possibles $\overbrace{PPFP\ldots FFFP}^{n \text{ résultats}}$, il apparaît clairement qu'il s'agit d'un arrangement avec répétitions de n lettres dont les lettres sont sont pris dans l'ensemble $\{P,F\}$.Il y a donc

$$2^n$$

résultats possibles.

Remarque : Une disposition ordonnée de n objets peut être interprétée comme un n-uples.

n étant un entier naturel, un n-uples (ou un n-uplets) est une énumération ordonnée de n éléments. Un n-uples est notée par $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En particulier, un 2-uples est un couple et un 3-uples est un triplet.

Exemple 8.20

Trois voyageurs arrivent dans une ville où il y a quatre hôtels. Chacun choisit un hôtel au hasard. De combien de façons ces personnes peuvent-elles se répartir ?

Solution proposée : Une manière de décrire le choix respectif de leur hôtel de X, Y et Z peut être formulée par un triplet ordonnée $(X,Y,Z) = (H_2, H_1, H_2)$. Plus d'un voyageur peut se retrouver dans le même hôtel. Il s'agit donc d'un arrangement, avec répétitions, de 3 hôtels choisi parmi les 4. Il y a donc

$$4^3 = 64$$

façons différentes de répartir ces trois voyageurs dans les quatre hôtels.

Théorème 4 (Arrangements simples)**.** *Un arrangement simple (arrangement sans répétition) de r objets pris dans un ensemble de n objets distincts $(r \leq n)$ est réalisé en r opérations :*

1) *Placer le premier objet.*
2) *Placer le deuxième objet.*
3) *Placer le troisième objet.*

$\vdots$

r-1) *Placer le (r-1)^{e}objet.*

r) *Placer le r^{e}objet.*

n	$n-1$	$n-2$				$n-r+2$	$n-r+1$
1^{e}	2^{e}	3^{e}				$(r\text{-}1)^{\text{e}}$	r^{e}

$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ \ldots \ \times (n-r+2) \times (n-r+1)$

Nous allons exprimer ce nombre d'une manière plus commode à l'aide de la notation factorielle :

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)\frac{(n-r)\times(n-r-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}{(n-r)\times(n-r-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Le nombre d'arrangements simples de r objets choisis dans un ensemble de n objets distincts est noté P_r^n. D'où la formule

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n$$

Exemple 8.21

Combien de nombres différents de 6 chiffres distincts peut-on former à partir des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ?

Solution proposée : Tout nombre de 6 chiffres sans répétition dont les chiffres sont pris parmi les chiffres proposés est clairement un arrangement simple de 6 objets pris dans un ensemble de 9 objets distincts. Il y a donc

$$P_6^9 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 60\,480$$

nombres différents de 6 chiffres distincts.

```
> numbperm(9,6);

                              60480
```

Exemple 8.22

Vingt-deux pilotes de voitures de course de Formule 1 ont participé au Grand Prix du Canada au circuit Gilles-Villeneuve en 2006. En supposant que chaque pilote avait la possibilité de terminer à n'importe quel rang, de combien de manières le podium (positions 1, 2 et 3) aurait-il pu se constituer ?

Solution proposée : Pour constituer un podium, il faut faire un arrangements simple de 3 pilotes parmi 22. Alors

$$P_3^{22} = \frac{22!}{(22-3)!} = \frac{22 \times 21 \times 20 \times \cancel{19!}}{\cancel{19!}} = 9\,240$$

Il y a donc 9 240 podiums différents.

```
> numbperm(22,3);
                                    9240
```

Exemple 8.23

Combien de mots de quatre lettres distinctes peut-on former avec les lettres du mots « EQUATIONS » si les deux premières lettres doivent être des consonnes et les deux dernières lettres des voyelles ?

Solution proposée : La formation d'un tel mot est réalisée en deux opérations successives :

I. Former un arrangement simple deux consonnes parmi {Q, T, N, S}

II. Former un arrangement simple deux voyelles parmi {E, U, A, I, O}

$$\underset{\text{I}}{\boxed{P_2^4}}\,\underset{\text{II}}{\boxed{P_2^5}} = \frac{4!}{2!} \times \frac{5!}{3!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{3!}} = 240$$

Il y a donc 240 mots possibles dans les conditions énoncées.

```
> numbperm(4,2)*numbperm(5,2);
                                    240
```

Exemple 8.24

Combien de nombres compris entre 2 000 et 5 000 peut-on former avec les chiffres {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, si chaque chiffre ne peut être répété dans le nombre ?

Solution proposée : La formation d'un tel nombre est réalisée en deux opérations successives :

I. Choisir le premier chiffre parmi {2, 3, 4} (contrainte oblige)

II. Former un nombre de trois <u>autres</u> chiffres

$$\underset{\text{I}}{\boxed{3}}\,\underset{\text{II}}{\boxed{P_3^6}} = 3 \times \frac{6!}{(6-3)!} = 3 \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 360$$

Il y a donc 360 nombres possibles dans les conditions énoncées.

```
> 3*numbperm(6,3);
                                   360
```

Dans l'exemple 8.19 à la page 328, à la place d'un nombre de 6 chiffres sans répétition, s'il avait été question d'un nombre de 12 chiffres sans répétition, la question n'aurait pas eu de sens. En effet, il aurait été absurde d'avoir un arrangement sans répétition d'un nombre d'objets pris dans un ensemble d'objets distincts qui en compte moins que le nombre qu'on devrait prendre. C'est pourquoi, dans le cas de la formule P_r^n, la valeur de r ne peut être supérieur à celle de n.

Qu'en est-il de la formule P_r^n où $r = n$? C'est le cas s'il avait été question de dénombrer tous les nombres différents de 9 chiffres sans répétition. En appliquant la formule des arrangements, nous obtenons

$$P_9^9 = \frac{9!}{(9-9)!} = \frac{9!}{0!}$$

Quel sens à donner, dans ce cas, à 0 ! ? Il aurait été facile de dénombrer le nombre de neuf chiffres sans répétition sans envisager le modèle des arrangements lui-même. Le nombre de 9 chiffres sans répétition correspond au nombre de permutations de ces 9 chiffres, soit $P_9 = 9!$.

$$P_9^9 = \frac{9!}{0!} = 9! = P_9$$

Pour que le modèle du dénombrement des arrangements P_r^n demeure valide lorsque $r = n$, nous devrions avoir $0! = 1$. C'est donc pourquoi au moment de définir la factorielle à la page 315 il a été ajouté l'égalité

$$\boxed{0! \overset{\text{déf}}{=} 1}$$

En conséquence, un arrangement sans répétition de n objets pris à la fois dans un ensemble de n objets distincts est une permutation de ces n objets.

$$\boxed{P_n^n = P_n}$$

Exemple 8.25

Au début d'un match de baseball, le gérant d'une équipe doit remettre à l'arbitre en chef la liste indiquant l'ordre de ses neuf joueurs qui se présenteront au bâton (frappeurs). Combien y a-t-il d'ordres possibles ?

Solution proposée : Un ordre des frappeurs est en fait un arrangement des neufs joueurs pris à la fois. C'est aussi donc une permutation de ces neuf joueurs participant au match.

$$P_9^9 = P_9 = 9!$$

Il y a donc 362 880 listes de neuf joueurs qui peuvent être remises en début de match.

```
> numbperm(9,9);
                                  362880
```

Exercices suggérés : 1 à 11 à la page 331

8.10 Exercices série 8.4

1. Donner la valeur de chacune des expressions suivantes.

   a) P_3^7 c) P_5^5 e) P_1^6

   b) P_6^9 d) P_4^4 f) P_1^7

2. Combien de nombres à trois chiffres peuvent être formés à partir des chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 si les répétitions

   a) ne sont pas permises ? b) sont permises ?

3. Combien de nombres peuvent être formés à partir des chiffres 1, 2, 3 et 4 si les répétitions ne sont pas permises ?

   Remarque : 32 et 321 sont des exemples de tels nombres.

4. Certaines plaques d'immatriculation commencent par trois lettres de l'alphabet, suivie de trois chiffres (0, 1, 2, . . . , 9). Calculer combien de plaques d'immatriculation sont possibles si

   a) le premier chiffre suivant la dernière lettre doit être différent de 0. item le premier chiffre suivant la dernière lettre doit être différent de 0 et si les trois lettres sont différentes.
   b) la première lettre ne peut pas être la lettre O ni la lettre I, si le premier chiffre suivant la dernière lettre ne peut pas être 0 et si il n'y a aucune répétition de lettres et de chiffres.

5. Dans une classe, il y a 40 pupitres. Si 34 élèves vont s'asseoir, de combien de manières différentes les pupitres peuvent-ils être occupés ?

6. Une certaine rangée sièges sera occupée en désignant des élèves parmi un groupe de dix élèves.

   a) De combien de manières différentes les sièges peuvent-ils être occupés ?
      i) si la rangée comporte dix sièges ?
      ii) si la rangée comporte six sièges ?
      iii) si la rangée comporte sept sièges ?
   b) Sachant qu'il y a cinq garçons et cinq filles dans le groupe et que garçons et filles doivent être alternés, calculer le nombre de manières différentes que les sièges peuvent être occupés dans ces conditions
      i) si la rangée comporte dix sièges ?
      ii) si la rangée comporte six sièges ?
      iii) si la rangée comporte sept sièges ?
   c) Sachant qu'il y a six garçons et quatre filles dans le groupe et que garçons et filles doivent être alternés, calculer le nombre de manières différentes que les sièges peuvent être occupés dans ces conditions
      i) si la rangée comporte dix sièges ?
      ii) si la rangée comporte six sièges ?
      iii) si la rangée comporte sept sièges ?

7. Une épreuve comporte dix questions vrai ou faux. Si on ne peut s'abstenir de répondre à une question,

   a) combien il y a de choix de réponses à cette épreuve ?
   b) combien peut-il y avoir d'épreuves complétées différentes ?
   c) combien de manières différentes peut-on s'y prendre pour compléter cette épreuve ?

8. Une épreuve comporte six questions à choix multiples où il y a cinq choix par question. Combien de manières différentes peut-on s'y prendre pour compléter cette épreuve ?

   Remarque : On ne peut s'abstenir de répondre à une question.

9. Un employé se rappelle que 2, 4, 5 et 9 sont les quatres chiffres d'un code déverrouillant la serrure lui donnant accès à une certaine pièce du bureau. L'employé a malheureusement oublié l'ordre des chiffres. Calculer le nombre maximum d'essais qu'il s'expose à faire pour obtenir le bon code.

10. En se référant à l'exercice précédent, considérons maintenant que dans le code à quatre chiffres, il y a un chiffre que se répète. Si l'employé se rappelle les chiffres 2, 4 et 5 mais qu'il a oublié lequel de ces chiffres se répète, calculer, dans ces conditions, le nombre maximum d'essais qu'il s'expose à faire pour obtenir le bon code.

11. Un palindrome est un entier, tel 45654, que l'on peut lire aussi bien depuis la gauche que depuis la droite.

    a) Combien de palindromes à cinq chiffres ou moins existe-il ?

    b) Combien de palindromes à n chiffres existe-il ?

8.10.1 Combinaisons

Lorsqu'il s'agit d'un arrangement avec ou sans répétition, notre intérêt est porté vers un ensemble dont la règle de formation des éléments impose un ordre d'agencement. Par exemple, considérons l'ensemble suivant {A, B, C, D}. Avec les éléments choisis A, B et C, l'arrangement ABC est différent de l'arrangement ACB.

$$\mathrm{ABC} \neq \mathrm{ACB} \qquad (\text{ context des arrangements})$$

En quelque sorte, un arrangement est décrit par un n-uplets pour lequel nous omettons, par concision, les virgules et les parenthèses.

Il y a au total $A_3^4 = 24$ arrangements sans répétition de 3 objets pris dans l'ensemble {A, B, C, D}.

À l'aide des macro-commandes `choose` et `permute` de l'extension `combinat`, la procédure suivante produit un affichage des arrangements plus intéressant pour notre propos que celle produite par la macro-commande `permute` elle-même.

```
> Arrangements:=proc(L::list,r::nonnegint)
  local i,Liste,n,P;
  n:=nops(L);
  if n<>nops(convert(L,set)) then error" Les éléments de votre\
                  liste ne sont pas tous distincts." fi;
  if r=0 then return lprint([]) fi;
  if r>n then error"La valeur de r est supérieure au nombre\
                  d'éléments de votre liste."fi;
  P:=combinat[choose](L,r);
  Liste:=seq(seq(cat(op(op(i,combinat[permute](op(j,P))))),i=1..r!),\
            j=1..n!/(n-r)!/r!);
  for i from 1 by r! to nops([Liste]) do
   lprint(Liste[i..i+r!-1])
  od
  end:
```

Avec la procédure «Arrangements», listons maintenant les arrangements simples de 3 objets pris dans un ensemble de 4 objets différents.

```
> Arrangements([A,B,C,D],3);

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB
```

Chaque ligne précédente montre les arrangements de trois objets choisis. Par exemple, à la première ligne, les éléments A, B et C ont été choisis et nous y voyons les 3 ! façons de les permuter.

FIG. 6: Arrangements

$$\overbrace{\begin{array}{lllllll}
\{ & \mathrm{ABC}, & \mathrm{ACB}, & \mathrm{BAC}, & \mathrm{BCA}, & \mathrm{CAB}, & \mathrm{CBA} \\
\{ & \mathrm{ABD}, & \mathrm{ADB}, & \mathrm{BAD}, & \mathrm{BDA}, & \mathrm{DAB}, & \mathrm{DBA} \\
\{ & \mathrm{ACD}, & \mathrm{ADC}, & \mathrm{CAD}, & \mathrm{CDA}, & \mathrm{DAC}, & \mathrm{DCA} \\
\{ & \mathrm{BCD}, & \mathrm{BDC}, & \mathrm{CBD}, & \mathrm{CDB}, & \mathrm{DBC}, & \mathrm{DCB}
\end{array}}$$

Dans le cas où il est question de seulement choisir 3 éléments à la fois dans l'ensemble {A, B, C, D} sans qu'il soit important de les agencer (permuter), nous parlons dans ce cas de combinaisons de trois éléments.

$$\text{ABC} = \text{ACB} = \text{BAC} = \text{BCA} = \text{CAB} = \text{CBA} \qquad \text{(context des combinaisons)}$$

Chaque membre de ces égalités expriment le même choix des éléments A, B et C.

Définition 6 (Combinaison)**.** *On appelle combinaison de r objets pris dans un ensemble de n objets distincts toute disposition non ordonnée de ces r objets.*

L'expression « disposition non ordonnée » est une expression consacrée par l'usage. Cette expression exprime que tout agencement de ces *r* objets est sans importance dans le calcul du dénombrement à faire.

Tout comme avec les arrangements, les combinaisons peuvent être simples ou avec répétitions.

La figure 6 de la page 333 nous présente les 24 arrangements de trois lettres pris dans l'ensemble {A, B, C, D}. La première ligne montre les 6 agencements des lettres A, B et C :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

et lorsque l'on ne tient pas compte des agencements, cela correspond à une même combinaison de ces trois lettres :

{A,B,C} = {A,C,B}= {B,A,C}={B,C,A}={C,A,B}={C,B,A}

C'est le cas aussi des trois autres lignes de ce tableau. Le nombre de combinaisons simples de trois éléments parmi les éléments de l'ensemble {A, B, C, D} est donc donné par le nombre de lignes dans la figure 6 de la page 333. Nous voyons donc qu'il y a en tout quatre manières différentes de « combiner » trois éléments de l'ensemble {A, B, C, D}. Choisissons la première colonne pour les identifier :

{A,B,C}, {A,B,D}, {A,C,D}, {B,C,D}

Remarque : Avec la notation ensembliste, il est habituel d'utiliser des accolades et la virgule comme séparateur dans l'énumération des objets composant un ensemble. Afin d'alléger cette notation mathématique dans le contexte des combinaisons, certains auteurs suppriment la virgule séparant les objets et noteraient donc les représentants ci-haut comme suit :

{ABC}, {ABD}, {ACD}, {BCD}

Cette façon de faire porte un peu à confusion : en fait, l'ensemble {ABC} contient un seul élément noté ABC. Afin d'éviter toute confusion, nous allons noter les représentants ainsi :

$$\lceil \text{ABC} \rfloor, \lceil \text{ABD} \rfloor, \lceil \text{ACD} \rfloor, \lceil \text{BCD} \rfloor$$

Les développements précédents nous montre la stratégie qu'il nous faut alors déployer pour calculer le nombre de combinaisons :

1. calculer d'abord le nombre d'arrangements de 3 lettres parmi les lettres de l'ensemble {A, B, C, D} ;
2. diviser le résultat précédant par le nombre de permutations des 3 lettres.

$$\frac{A_3^4}{P_3} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = 4$$

Notons le calcul de $\dfrac{A_3^4}{P_3} = \dfrac{A_3^4}{3!}$ par C_3^4.

$$C_3^4 = \frac{A_3^4}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!}$$

Voici une procédure permettant de lister à notre convenance les combinaisons de *r* objets d'un ensemble de *n* objets différents.

```
> Combinaisons:=proc(L::list,r::nonnegint)
  local critère,i,n,PP;
  n:=nops(L);
  if n<>nops(convert(L,set)) then error"Les éléments de votre\
             liste ne sont pas tous distincts." fi;
  if r=0 then return lprint() fi;
  if r>n then error"La valeur de r est supérieure au nombre\
             d'éléments de la liste." fi;
  lprint(seq(cat(op(op(i,combinat[choose](L,r)))),i=1..n!/(n-r)!/r!));
  end:
```

Avec cette procédure, listons maintenant les combinaisons de 3 objets pris dans un ensemble de 4 objets différents.

```
> Combinaisons([A,B,C,D],3);
{ABC}, {ABD}, {ACD}, {BCD}
```

Le théorème suivant nous donne la stratégie de calcul pour déterminer le nombre de combinaisons sans répétition de r éléments pris dans un ensemble de n éléments distincts.

Théorème 5 (Combinaisons simples). *Le nombre de combinaison simples (sans répétition) de r objets pris dans un ensemble de n objets distincts est notée C_r^n et est donné par la formule*

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \quad 0 \le r \le n$$

Exemple 8.26

À un examen final, on demande aux élèves de répondre à seulement 6 questions de leur choix sur les 10 que comportent le questionnaire. L'élève devra clairement indiquer les 6 questions choisies. Combien y a-t-il de choix différents de questions ?

Solution proposée : Un choix de 6 questions est clairement une combinaison simple de 6 questions parmi les 10. Alors

$$C_6^{10} = \frac{10!}{(10-6)!\,6!} = \frac{10 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \cancel{8} \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{6!}}$$

Il y a donc 210 possibilités de choix de 6 questions.

```
> numbcomb(10,6);
                              210
```

Exemple 8.27

Un exemple typique de dénombrement par les combinaisons simples est le calcul du nombre de billets différents à la loterie «6/49».

Solution proposée : Un billet est constitué par une combinaison simple de 6 numéros parmi les numéros de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ldots,48,49\}$. Alors

$$C_6^{49} = \frac{49!}{(49-6)!\,6!} = \frac{49\times \cancel{48}\times 47\times 46\times \overset{3}{\cancel{45}}\times 44\times \cancel{43!}}{\cancel{43!}\times \cancel{6}\times \cancel{5}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}} = 49\times 47\times 46\times 3\times 44$$

Il y a donc 13 983 816 billets différents.

```
> numbcomb(49,6);
                                   13983816
```

Exemple 8.28

Le jeu de Poker consiste à distribuer à chaque joueur 5 cartes d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Une main est un terme des jeux de cartes. Cette expression exprime le nombre de cartes reçues par chaque joueur.

Combien il y a de mains différentes au jeu de Poker ?

Solution proposée : Une main est une combinaison simple de 5 cartes parmi les 52 cartes d'un jeu ordinaire. Alors

$$C_5^{52} = \frac{52!}{(52-5)!\,5!} = \frac{52\times 51\times \overset{10}{\cancel{50}}\times 49\times \overset{2}{\cancel{48}}\times \cancel{47!}}{\cancel{47!}\times \cancel{5}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}} = 52\times 51\times 10\times 49\times 2$$

Il y a donc 2 598 960 mains différents au jeu de Poker.

```
> numbcomb(52,5);
                                   2598960
```

En analyse combinatoire, nous rencontrons souvent la formulation «nombre de manières de choisir r objets dans un ensemble donné» au lieu du «nombre de combinaisons simples de r objets d'un ensemble donné d'objets distincts». Ainsi, à l'exemple de la loterie «6/49», la formulation de la solution proposée aurait pu débutée en ces termes : *un billet correspond à choisir 6 numéros parmi les 49*. D'ailleurs, la lettre C dans la notation C_r^n servant à exprimer le nombre de **combinaisons** de r objets pris dans un ensemble de n objets distincts peut servir également à exprimer le nombre de manières de **choisir** r objets dans un ensemble de n objets distincts.

Exemple 8.29

Nous avons à former un comité de lecture d'un prix littéraire. Ce comité sera formé de 4 personnes choisies parmi 9 candidats possibles. Combien de comités différents peut-on former ?

Solution proposée : Il y a autant de tels comités différents qu'il y de manières de choisir 4 personnes parmi les neufs candidats. Alors

$$C_4^9 = \frac{9!}{(9-4)!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \cancel{8} \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}} = 3 \times 7 \times 6$$

Il y a donc 126 différents comités de lecture possibles.

```
> numbcomb(9,4);
                                   126
```

Exemple 8.30

Combien de comités différents comprenant 1 professeur et 3 élèves peut-on former avec 3 professeurs et 5 élèves ?

Remarque : Tous les membres du comité ont des rôles identiques.

Solution proposée : La formation d'un tel comité est réalisée en deux opérations. Une opération pour choisir un professeur et une autre opération pour choisir trois élèves. Reste à appliquer le principe de multiplication pour calculer le nombre de tels comités.

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{C_1^3}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{C_3^5}} = C_1^3 \times C_3^5 = 30$$

Il y a donc 30 comités différents composés d'un professeur et de trois élèves.

```
> numbcomb(3,1)*numbcomb(5,3);
                                   30
```

Exemple 8.31

D'un groupe de 4 anglophones et de 9 francophones, on veut former un comité de 6 personnes (qui ont tous des rôles identiques). De combien de façons différentes peut-on les former

a) au total ?

b) si 2 francophones doivent en faire partie ?

c) si au moins un anglophone doit en faire partie ?

Solution proposée :

a) Il y a autant de comités que l'on peut former qu'il y a de manières de choisir 6 personnes dans ce groupe. Il y a donc au total

$$C_6^{13} = 1\,716 \text{ comités}$$

b) Pour s'assurer qu'il y ait 2 francophones, formons les comités en deux opérations.

I. choisir deux francophones parmi les neuf ; (contrainte oblige)

II. choisir 4 anglophones parmi les 4.

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{C_2^9}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{C_4^4}} = C_2^9 \times C_4^4 = 36 \text{ comités}$$

Il y a donc 36 comités formés de deux francos et de quatre anglos.

c) Sur la base du raisonnement proposé à la partie b), nous pourrions calculer le nombre de comités comportant 1, 2 3 et 4 anglos et en faire l'addition. Cela nous donnerait, bien sûr, le nombre de comités comportant au moins un anglo. Mais, indirectement, déterminons ce nombre de comités plus rapidement en soustrayant du nombre total de comités calculé à la partie a), le nombre de comités ne comportant aucun anglos, c'est-à-dire le nombre de comités ne comportant que des francos.

$$C_6^{13} - C_6^9 = 1632$$

Il y a donc 1 632 comités que l'on peut formés de sorte qu'il y ait au moins un anglophone qui en fait partie.

Lorsqu'il s'agit de calculer le nombre d'arrangements simples P_r^n, il peut être avantageux de décomposer ce calcul en considérant les deux opérations suivantes :

I. d'abord calculer le nombre de manière de choisir r objets dans cet ensemble ;

II. pour chaque choix de r objets, considérer leurs permutations

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{C_r^n}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{r!}} = C_r^n \times r! = P_r^n$$

En fait, ces deux opérations nous permettent de considérer à rebours les développements qui nous ont amené à la formule C_r^n.

$$\begin{aligned} P_r^n &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\,r! \\ &= C_r^n\,r! \end{aligned}$$

$$\boxed{P_r^n = C_r^n\,r!}$$

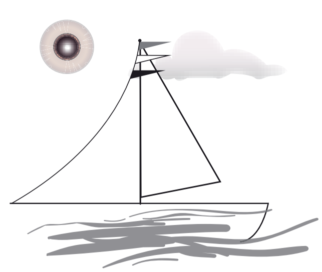
Bien que la notion d'arrangements simples nous a fait comprendre celle des combinaisons simples, nous pouvons très bien laisser de côté la formule des arrangements simples P_r^n dans les calculs des dénombrements et procéder directement avec la formule équivalente $C_r^n\,r!$. Nous appellerons cette formule de dénombrement stratégie «**Choisir et permuter**».

Exemple 8.32

Avec les cinq couleurs suivantes :

jaune, vert, bleu, rouge et noir,

combien de messages différents est-il possible d'envoyer telle que le montre l'illustration ci-contre en utilisant 3 couleurs différentes si chaque message doit être lu du haut du mât à la poupe ?



Solution proposée : Puisque la lecture est faite du haut du mât à la poupe, un tel message est donc une disposition ordonnée de trois couleurs. Alors, la composition d'un message à envoyer est faite en deux opérations :

I. choisir 3 couleurs parmi les 5 couleurs (distinctes) ;
II. pour chaque choix de 3 couleurs, considérez leurs permutations.

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{C_3^5}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{3!}} = C_3^5 \times 3! = 60$$

Il y a donc 60 messages que l'on peut envoyés dans les conditions spécifiées.

La solution précédente aurait pu être développée, bien sûr, avec la stratégie des arrangements au lieu de la stratégie **Choisir et permuter**. Les prochains exemples illustreront mieux la pertinence de la stratégie « Choisir et permuter ».

Exemple 8.33

Avec les lettres du mot «BRANCHIES», combien peut-on former de mots différents de 5 lettres sans répétition de lettres dans le mot

a) au total ?
b) contenant 3 consonnes et 2 voyelles ?
c) contenant 3 consonnes et 2 voyelles se terminant avec un R et ne contenant pas la lettre E ?

Solution proposée : Le mot «BRANCHIES» est composé de 9 lettres distinctes réparties en 6 consonnes et 3 voyelles.

a) La composition d'un mot de 5 lettres est faite en deux opérations :

I. choisir 5 lettres parmi les 9 lettres (distinctes) ;
II. pour chaque choix de 5 lettres, considérer leurs permutations.

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{C_5^9}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{5!}} = C_5^9 \times 5! = 15120$$

Il y a donc au total 15 120 mots que l'on peut formés dans les conditions données.

b) La composition d'un mot de 5 lettres contenant 3 consonnes et 2 voyelles est faite en 3 opérations :

I. choisir 3 consonnes parmi les 6 ;
II. choisir 2 voyelles parmi les 3 ;
III. pour chaque tel groupe de 5 lettres, considérer leurs permutations.

$$\underset{\mathrm{I}}{\boxed{C_3^6}}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{C_2^3}}\underset{\mathrm{III}}{\boxed{5!}} = C_3^6 \times C_2^3 \times 5! = 7200$$

Il y a donc 7 200 mots de 5 lettres contenant 3 consonnes et 2 voyelles.

c) La formation d'un mot de 5 lettres contenant 3 consonnes et 2 voyelles se terminant avec un R et ne contenant pas la lettre E est faite en 4 opérations :

I. placer la lettre R à fin du mot (contrainte oblige) ;
II. choisir 2 consonnes parmi les 5 autres ;
III. choisir 2 voyelles parmi les 2 ;

IV. considérer les permutations des 4 premières lettres.

1	C_2^5	C_2^2	4!
I	II	III	IV

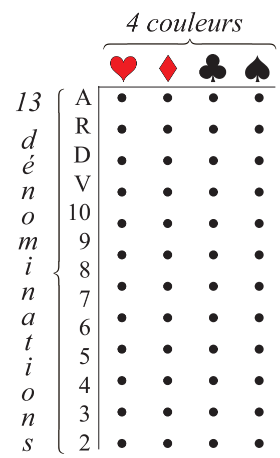
$$= 1 \times C_2^5 \times C_2^2 \times 4! = 240$$

Il y a donc 240 mots de 5 lettres contenant 3 consonnes et 2 voyelles se terminant avec un R et ne contenant pas la lettre E.

Exemple 8.34

À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, nous composons une main de 3 cartes. Combien pouvons composer de mains différentes ayant

a) 3 as ?
b) 3 piques ?
c) un triplet ?
d) 3 cartes d'une même couleur ?
e) une paire ?
f) 3 couleurs différentes ?



Solution proposée :

Pour être en mesure de bien saisir les différents raisonnements qui vous seront proposés, il est opportun de visualiser le jeu de cartes tel que montré dans la figure ci-contre. La figure présente les 52 cartes organisés selon les 13 dénominations et selon les 4 couleurs.

a) Un main de 3 cartes ayant 3 As est composée en une seule opération : choisir 3 cartes parmi les 4 As. En effet, toute combinaison de 3 cartes parmi les 4 As composera une main de 3 As :

$$C_3^4 = 4$$

Nous pouvons donc composer 4 mains de 3 cartes ayant 3 As.

b) Une main de 3 cartes ayant 3 piques est composée en une seule opération : choisir 3 dénominations parmi les piques. En effet, toute combinaison de 3 cartes parmi les 13 piques composera une main de 3 piques :

$$C_3^{13} = 286$$

Nous pouvons donc composer 286 mains de 3 cartes ayant 3 piques.

c) Une main de 3 cartes formant un triplet est composée en deux opérations :
   I. choisir la dénomination du triplet : C_1^{13} ;
   II. choisir 3 cartes parmi les couleurs : C_3^4.

   Nous pouvons donc composer $C_1^{13} \times C_3^4 = 13 \times 4 = 52$ mains de 3 cartes formant un triplet.

d) Une main ayant 3 cartes d'une même couleur est composée en deux opérations :
   I. choisir la couleur des 3 cartes : C_1^4 ;
   II. choisir 3 cartes parmi les 13 dénominations de la couleur choisie : C_3^{13}.

   Nous pouvons donc composer $C_1^4 \times C_3^{13} = 1\,144$ mains de 3 cartes de la même couleur.

e) Une main de 3 cartes ayant une paire est composée en trois opérations :
   I. choisir la dénomination de la paire : C_1^{13} ;
   II. choisir 2 couleurs pour la paire : C_2^4 ;
   III. choisir une carte parmi les 48 autres : C_1^{48} (il faut s'assurer de ne pas former de triplet).

Nous pouvons donc composer $C_1^{13} \times C_2^4 \times C_1^{48} = 3\,744$ mains de 3 cartes ayant une paire.

f) Une main ayant 3 couleurs différentes est composée en quatre opérations :
   I. choisir trois couleurs parmi les 4 : C_3^4 ;
   II. choisir une dénomination pour une première couleur : C_1^{13} ;
   III. choisir une dénomination pour une deuxième couleur : C_1^{13} ;
   IV. choisir une dénomination pour la troisième couleur : C_1^{13} ;

   Nous pouvons donc composer $C_3^4 \times C_1^{13} \times C_1^{13} \times C_1^{13} = 8\,788$ mains de 3 cartes de couleurs différentes.

L'exemple suivant est particulièrement intéressant. Cet exemple montre qu'il faut parfois être astucieux pour faire un calcul de dénombrement. L'astuce suivant est celui qu'il faut utilisé pour déterminer le nombre de manières de dénombrer les permutations des lettres du mot MISSISSAUGA où les S sont séparés (voir page 322).

Exemple 8.35

De combien de manières différentes peut-on disposer en ligne 4 hommes et 3 femmes si les 3 femmes doivent être séparées ?

Solution proposée : Les 3 femmes sont séparées s'il n'y en a aucune qui soit immédiatement voisine. Chaque femme doit donc être séparée par au moins un homme.

Utilisons alors tous les hommes comme d'éventuels éléments «séparateurs». Considérons le schéma suivant :

$$\underset{e_1}{\underline{\quad}}\ \mathrm{H}_1\ \underset{e_2}{\underline{\quad}}\ \mathrm{H}_2\ \underset{e_3}{\underline{\quad}}\ \mathrm{H}_3\ \underset{e_4}{\underline{\quad}}\ \mathrm{H}_4\ \underset{e_5}{\underline{\quad}}$$

Pour réaliser une disposition où les femmes sont séparées, il suffit de choisir 3 emplacements parmi les emplacements $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ pour placer les femmes afin d'être assurer qu'elles soient séparées par au moins un homme. Par exemple, si nous choisissons les emplacements suivants : e_1, e_3 et e_4

$$\underset{e_1}{\underline{\checkmark}}\ \mathrm{H}_1\ \underset{e_2}{\underline{\quad}}\ \mathrm{H}_2\ \underset{e_3}{\underline{\checkmark}}\ \mathrm{H}_3\ \underset{e_4}{\underline{\checkmark}}\ \mathrm{H}_4\ \underset{e_5}{\underline{\quad}}$$

et que nous y placions trois femmes comme suit,

$$\underset{e_1}{\underline{\mathscr{F}_1}}\ \mathrm{H}_1\ \underset{e_2}{\underline{\quad}}\ \mathrm{H}_2\ \underset{e_3}{\underline{\mathscr{F}_2}}\ \mathrm{H}_3\ \underset{e_4}{\underline{\mathscr{F}_3}}\ \mathrm{H}_4\ \underset{e_5}{\underline{\quad}}$$

ce qui correspond à la la disposition ordonnée ci-dessous où les femmes sont séparées.

$$F_1H_1H_2F_2H_3F_3H_4$$

Alors, un alignement d'hommes et de femmes où les femmes sont séparées est faite en trois opérations :
   I. choisir trois emplacements parmi les emplacements $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ pour les femmes : C_3^5 ;
   II. permuter les hommes entre eux : 4! ;
   III. permuter les femmes entre elles : 3! ;

Nous pouvons donc réaliser

$$C_3^5 \times 4! \times 3! = 1\,440$$

alignements où les femmes sont séparées.

À la page 322, nous avons affirmé qu'il y avait 70 dispositions des lettres du mot MISSISSAUGA où les « S » sont séparées. Ce nombre est-il exact ? Justifiez.

8.10.2 Propriété de symétrie des combinaisons simples

En choisissant r objets dans un ensemble qui en contient n distincts, il y a automatiquement $(n-r)$ objets qui ne sont pas choisis. Ainsi, pour tout choix de r objets, nous pouvons lui associer un choix de $(n-r)$ objets. Il y a donc autant de manières de choisir r objets qu'il y a de manières d'en choisir $n-r$ dans un ensemble en contenant n :

$$\boxed{C_r^n = C_{n-r}^n, \quad 0 \leq r \leq n}$$

Cette propriété de symétrie s'appelle également propriété du complément à n des combinaisons simples car $r+(n-r)=n$.

Exemple 8.36

Trouver n si $C_5^n = C_8^n$.

Solution proposée : En vertu de la propriété de symétrie des combinaisons, il suffit de considérer 5 et 8 comme complémentaires à leur somme $5+8=13$ d'où $n=13$. (On a bien l'égalité $C_5^{13} = C_8^{13}$.)

Exemple 8.37

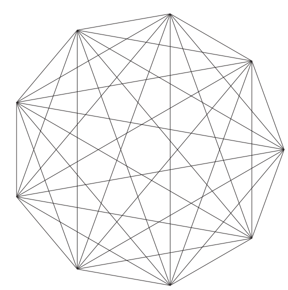
Trouver n si $C_r^{21} = C_{r+3}^{21}$.

Solution proposée : Il suffit de considérer r et $r+3$ comme complémentaires à leur somme $r+(r+3) = 2r+3$ et de résoudre ensuite, pour r, l'égalité $2r+3=21$. Ce qui donne $r=9$. (On a bien l'égalité $C_9^{21} = C_{12}^{21}$.)

Exercices suggérés : 1 à 34 à la page 343

8.11 Exercices série 8.5

1. Donner la valeur de chacune des expressions suivantes.
   a) C_3^7 c) C_5^5 e) C_{n-1}^n
   b) C_6^9 d) C_0^7 f) C_0^7
2. Simplifier $\dfrac{A_5^n}{C_4^{n-1}}$.
3. Résoudre pour x les équations suivantes.
   a) $C_{11}^x = C_7^x$ b) $C_x^{21} = C_{x-3}^{21}$
4. De combien de façons peut-on composer une équipe de 5 personnes à partir d'un groupe de 22 personnes ?
5. Un examen comportant dix questions a la consigne suivante : l'élève doit répondre à six questions de son choix. Combien de manières différentes
   a) un élève pourrait-il respecter la consigne de cet examen ?
   b) un groupe de 33 élèves peuvent-ils respecter cette consigne ?
6. En se référant à l'exercice précédent, si la consigne est plutôt la suivante : l'élève doit répondre à au moins six questions de son choix. Combien de façons
   a) un élève a-t-il de compléter cet examen ?
   b) un élève a-t-il de compléter cet examen si les deux premières questions sont imposées ?
7. Combien de sous-ensembles 3 éléments possède l'ensemble $\{a, 1, b, 2, c, 3, d, 4\}$?
8. Le bridge est un jeu de cartes dérivé du whist, utilisant toutes les cartes d'un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes et opposant deux équipes de deux joueurs. Chaque joueur reçoit treize cartes. Combien y a-t-il de mains différentes au bridge ?
9. On trace six points sur la circonférence d'un cercle. Combien de sécantes au cercle peut-on tracer si chaque sécante doit passer par deux de ces points ?
10. Un dessin géométrique est obtenu en joignant chaque paire de sommets d'un ennéagone régulier (voir la figure ci-contre).
    a) Combien de diagonales un tel polygone a-t-il ?
    b) Combien de triangles sur ce dessin ont leurs trois sommets sur l'ennéagone ?
    c) Combien de quadrilatères sur ce dessin ont leurs quatre sommets sur l'ennéagone ?



11. Considérons huit points quelconques d'un plan de telle sorte que trois de ces points ne sont jamais colinéaires.
    a) Combien de droites ces points déterminent-ils ?
    b) Combien de triangles ces points déterminent-ils ?
12. Un contremaître a sous sa responsabilité douze ouvriers.
    a) Pour toute la semaine prochaine, le contremaître doit assigner certains de ses ouvriers à quatres postes différents. De combien de façons peut-il le faire si chaque ouvrier peut occuper n'importe quel poste ?
    b) Le contremaître doit malheureusement mettre-à-pied la semaine prochaine quatre de ses ouvriers. De combien de façons peut-il le faire s'il procède par tirage au sort ?
13. Combien de mots de trois lettres différentes peut-on former à partir des lettres du mot MATRICES.
14. À l'ouverture de la clinique, cinq personnes entrent dans la salle d'attente où il y a dix sièges libres. De combien de manières peuvent-elles s'asseoir ?
15. À l'ouverture de la clinique, dix personnes entrent dans la salle d'attente où il y a cinq sièges libres.
    a) De combien de manières ces sièges peuvent-ils être tous occupés ?

b) De combien de manières ces sièges peuvent-ils être tous occupés si deux des dix personnes sont des personnes très âgées qui ne peuvent absolument pas rester debout ?

16. Un examen final est composé de trois sections de cinq questions chacune. Si l'élève doit répondre à deux questions par section, combien cet élève a-t-il de choix différents possibles ?

17. De combien de manières quatres amis peuvent-ils s'inscrire à douze activités différentes s'il est entendu que chaque personne doit s'inscrire à exactement trois activités

    a) et si aucun d'entre eux ne se retrouvent dans une même activité ?

    b) et s'il est possible qu'il se retrouve dans une même activité ?

18. Un étudiant possède cinq livres de mathématiques, quatre livres d'histoire et huit livres de littérature. De combien de manières différentes ces livres peuvent-ils être rangés

    a) sur une même étagère s'il sont rangés au hasard ?

    b) sur une même étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres ?

    c) sur une même étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres mais ceux traitant des mathématiques sont placés à droite ?

    d) sur deux étagères après que l'étudiant ait choisi deux livres de chaque matière et qu'il place les livres traitant de la même matière les uns à côté des autres ?

19. Dans un groupe de douze étudiants qui se retrouvent dans un chalet, trois d'entre eux seront désignés pour faire la cuisine et quatre pour laver la vaisselle et les cinq autres feront le ménage au moment du départ. De combien de façons peut-on composer ces "trois équipes" si trois des étudiants ne savent pas cuisiner ?

20. Combien peut-on former d'équipes différentes de six hommes choisis parmi quatre officiers et six soldats si dans chaque équipe, il doit y avoir

    a) un officier ?

    b) aucun officier ?

    c) au moins un officier ?

21. De combien de façons différentes peut-on former un comité d'un homme et d'une femme choisis parmi douze couples si les deux membres du comité ne peuvent provenir du même couple ?

22. On évalue à quarante-cinq, le nombre de poignées de mains échangées à une réunion. Si tous les participants à cette réunion se sont donné la main, trouver le nombre de participants.

23. La capacité d'un autobus est de trente-deux passagers. Il y a dans cet autobus douze sièges qui sont près des fenêtres. De combien de façons dix passagers peuvent-ils s'asseoir si trois d'entre eux désirent absolument s'asseoir près d'une fenêtre et si deux autres refusent catégoriquement de s'asseoir près d'une fenêtre ?

24. De combien de manières peut-on transporter seize personnes en utilisant deux véhicules si le nombre maximum de passagers pouvant prendre place dans le premier est de huit et dans le second, le nombre maximum est de dix passagers ? (On ne tiendra pas compte de la place occupée à l'intérieur des véhicules par chacun des passagers.)

25. De combien de manières peut-on occuper huit personnes à deux tâches s'il faut au moins trois personnes par tâche ?

26. Combien de mots différents des deux consonnes et de deux voyelles peut-on former avec les lettres du mot FORMATION.

27. Un nouveau gouvernement est élu. Excluant le premier ministre, il y soixante-dix autres députés. Ce gouvernement aura vingt-cinq ministres choisis parmi les soixante-dix autres députés. Combien de conseils de ministres différents peuvent être formés

    a) si les ministres sont choisis au hasard par le premier ministre ?

    b) si dix députés élus étaient assurés avant le début des élections d'être ministres ?

    c) si ces mêmes députés étaient assurés avant le début des élections du ministère qu'il occupera s'il était élu ?

28. À partir de douze couples mariés, on forme un comité de six personnes (qui ont tous des rôles identiques). De combien de manières différentes peut-on le former s'il doit y avoir

    a) trois couples mariés sur le comité ?

    b) des personnes de couples différents sur le comité ?

c) deux couples mariés seulement sur le comité ?

29. Charlie Brown doit à nouveau former son club de baseball pour la nouvelle saison. Il lui reste quatre postes à combler : le premier but, le deuxième but, le troisième but et l'arrêt-court. Il doit choisir parmi les sept candidats suivants : Linus, Lucy, Patty, Violet, Scherman, Schroeder et non le moindre Snoopy.
   a) De combien de façons différentes peut-il le faire ?
   b) De combien de façons différentes peut-il le faire, s'il ne doit jamais faire jouer Linus et Lucy en même temps ?

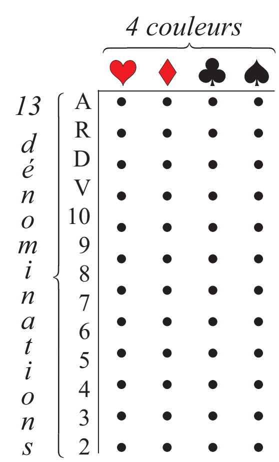
30. Un chanteur prépare un tour de chant. Ce chanteur possède un répertoire de 15 chansons qu'il compte interpréter dont six sont des très anciennes chansons et quatre nouvelles. Si son tour de chant comporte six chansons,
   a) combien y a-t-il de tours de chant différents ?
   b) combien y a-t-il de tours de chant différents s'il veut chanter deux très anciennes chansons et deux nouvelles ?
   c) combien y a-t-il de tours de chant différents s'il veut chanter trois très anciennes chansons mais jamais deux consécutives ?

31. Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, on désire former des nombres de sept chiffres différents. Combien de nombres différents peut-on former si ces nombres doivent contenir
   a) au moins trois chiffres impairs, toujours voisins ?
   b) trois chiffres impairs toujours séparés ?

32. Trois personnes s'assoient au comptoir d'un restaurant où les neuf bancs sont libres. De combien de façons différentes peuvent-elles prendre place de telle manière que chacune d'elles se retrouve sans voisin immédiat ?

33. Combien de mots de quatre lettres peut-on former à partir des lettres du mot ULTRASON si, lorsqu'on choisit la lettre R, il faut prendre le bloc RAS ?

34. À partir d'un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes, on compose une main de cinq cartes. Combien existe-t-il de manières différentes de composer
   a) les cinq cartes ?
   b) deux valets et trois rois ?
   c) cinq cœurs ?
   d) exactement trois piques sur les cinq cartes ?
   e) au moins un as ?
   f) des cartes de la même couleur ?
   g) des dénominations différentes ?
   h) quatre cartes d'une même dénomination ?
   i) un triplet est une paire ?
   j) deux paires ?



8.11.1 Combinaisons composées ou Formule de Pascal

Si nous particularisons un objet donné dans un ensemble de n objets distincts alors, en choisissant r objets dans cet ensemble où nous avons C_r^n façons de le faire, il y aura des choix pour lesquels cet élément particulier aura été choisi et d'autres choix où cet élément n'aura pas été choisi.

Par exemple, considérons un groupe de 30 élèves. Dans ce groupe, il y a un élève qui porte une magnifique casquette rouge avec un minuscule pompon vert. Si le professeur choisi 5 élèves, il peut le faire de C_5^{30} manières. De tous ces sous-groupes de 5 élèves qu'il peut former, il y en a un certain nombre où on retrouvera l'élève à la casquette rouge et d'autres groupes de 5 élèves où cet élève n'y sera pas.

La formule de Pascal permet de comptabiliser les choix de r objets dans un ensemble de n objets, soit C_r^n, en deux étapes :

Étape 1 : Calcul des choix de r objets en s'assurant qu'un élément particulier est automatiquement choisi.

Étape 2 : Calcul des choix de r objets en s'assurant que cette élément particulier est automatiquement exclu.

Considérons donc, parmi les n objets distincts, *un objet* particulier.

- D'une part, incluons d'office cet objet qui fera partie des r objets choisis, il s'agit ensuite de compléter la sélection en choisissant $(r-1)$ objets parmi le $(n-1)$ objets restants. Alors le calcul de C_{r-1}^{n-1} donne le nombre de choix de r objets parmi n **qui inclut cet objet particulier**.
- D'une part, afin de s'assurer de ne pas choisir cet objet particulier, excluons-le de l'ensemble de départ et calculons alors le nombre de choix de r objets parmi les $n-1$ restants, soit C_r^{n-1}. C_r^{n-1} nous donne le nombre de choix de r objets **qui exclut cet objet particulier**.

d'ou la relation de Pascal :

$$\boxed{C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} = C_r^n, \qquad 1 \leq r \leq n-1}$$

Montrons maintenant que les nombres du fameux triangle de Pascal sont obtenus en appliquant directement la relation de Pascal.

Comme le montre la partie droite de la figure suivante, pour obtenir chaque nombre du *triangle de Pascal*, il suffit de porter les valeurs prises par r en colonne et celles prises par n en ligne. La valeur attribuée à l'intersection de chaque ligne et de chaque colonne, soit C_r^n, est obtenue en faisant la somme de la valeur située immédiatement au dessus, C_r^{n-1}, et celle située immédiatement au-dessus et à gauche C_{r-1}^{n-1}. Ce calcul correspond à l'application de la *formule de Pascal*.

$$
\begin{array}{r||lllllllll}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1 & 1 \\
n=2 & 1 & 2 & 1 \\
n=3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
n=4 & 1 & \mathbf{4} & \mathbf{6} & 4 & 1 \\
n=5 & 1 & 5 & \mathbf{10} & 10 & 5 & 1 \\
n=6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
n=7 & 1 & 7 & 21 & 35 & \mathbf{35} & \mathbf{21} & 7 & 1 \\
n=8 & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & \mathbf{56} & 28 & 8 & 1 \\
\text{etc.} & & & & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r||llllllllll}
 & * \\
 & * & * \\
 & * & * & * \\
 & * & * & * & * \\
n-1 & * & C_{r-1}^{n-1} & C_r^{n-1} & * & * \\
n & * & * & C_r^n & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\text{etc.} & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

FIG. 7: Triangle de Pascal

Ainsi donc, chaque nombre du *triangle de Pascal* correspond à une combinaison :

$$
\begin{array}{r||l}
n=0 & C_0^0 \\
n=1 & C_0^1\ C_1^1 \\
n=2 & C_0^2\ C_1^2\ C_2^2 \\
n=3 & C_0^3\ C_1^3\ C_2^3\ C_3^3 \\
n=4 & C_0^4\ C_1^4\ C_2^4\ C_3^4\ C_4^4 \\
n=5 & C_0^5\ C_1^5\ C_2^5\ C_3^5\ C_4^5\ C_5^5 \\
n=6 & C_0^6\ C_1^6\ C_2^6\ C_3^6\ C_4^6\ C_5^6\ C_6^6 \\
n=7 & C_0^7\ C_1^7\ C_2^7\ C_3^7\ C_4^7\ C_5^7\ C_6^7\ C_7^7 \\
n=8 & C_0^8\ C_1^8\ C_2^8\ C_3^8\ C_4^8\ C_5^8\ C_6^8\ C_7^8\ C_8^8 \\
\text{etc.} &
\end{array}
$$

FIG. 8: Combinaisons et triangle de Pascal

Voici une façon avec MAPLE de générer les lignes du triangle de Pascal. Remarquez l'imbrication des deux macro-commandes `seq`.

```
> n:=15;
  seq(lprint(seq(numbcomp(k,j),j=1..k)),k=1..n);
1
1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1
1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1
1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1
1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1
1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1
```

8.11.2 Binôme de Newton

Obtenons la forme développée de quelques puissances successives du binôme $(a+b)$ avec des exposants entiers non négatifs :

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\\
(a+b)^7 &= \dots
\end{aligned}$$

Nous observons que les coefficients des formes développées des puissances entières non négatives de chaque binôme correspondent, pour chaque valeur de la puissance n, aux valeurs du triangle de Pascal. D'autre part, nous remarquons la somme des exposants de a et b de chaque terme donne la puissance à laquelle nous élevons le binôme.

Théorème 6 (Binôme de Newton)**.** *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, deux nombres réels quelconques et soit $n \in \mathbb{N}$, un nombre entier non négatif. Alors,*

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n\\
&= \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r.
\end{aligned}$$

Preuve Soit P(n) : $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$. À l'aide de l'axiome d'induction, montrons que P(n) est vrai, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le calcul de $(a+b)^n$ avec $n=0$ nous donne

$$(a+b)^0 = 1$$

D'autre part, le calcul développé de la formule donne

$$\sum_{r=0}^{0} C_r^n a^{n-r} b^r = C_0^0 a^{0-0} b^0 = 1a^0b^0 = 1$$

Donc P(0) est vrai, ce qui vérifie la première condition de l'axiome d'induction.

Vérifions ensuite la seconde condition de l'axiome d'induction, soit l'hérédité : P$(k) \Longrightarrow$ P$(k+1)$.

Supposons maintenant, par hypothèse d'induction que P(k) est vrai, c'est-à-dire que la formule de Newton est vraie avec $n=k$, c'est-à-dire que l'égalité suivante est vraie, quelque soit n tel que $0 < n \leq k$

$$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r$$

Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k && \text{loi des exposants}\\
&= (a+b)\sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r && \text{hypothèse d'induction P}(k)\\
&= a\sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r + b\sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r && \text{distributivité}\\
&= a\left[a^k + \sum_{r=1}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r\right] + b\left[\sum_{r=0}^{k-1} C_r^k a^{k-r} b^r + b^k\right] && \text{dévelop. partiel de la sommation}\\
&= a^{k+1} + a\sum_{r=1}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r + b\sum_{r=0}^{k-1} C_r^k a^{k-r} b^r + b^{k+1} && \text{loi des exposants}\\
&= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} C_r^k a^{k-r+1} b^r + \sum_{r=0}^{k-1} C_r^k a^{k-r} b^{r+1} + b^{k+1} && \text{propriété de la sommation}\\
&= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} C_r^k a^{k-r+1} b^r + \sum_{r=1}^{k} C_{r-1}^k a^{k-r+1} b^r + b^{k+1} && \text{réindexation}\\
&= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \left(C_r^k + C_{r-1}^k\right) a^{k-r+1} b^r + b^{k+1} && \text{propriétés des sommations}\\
&= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} C_r^{k+1} a^{k-r+1} b^r + b^{k+1} && \text{formule de Pascal}\\
&= \sum_{r=0}^{k+1} C_r^{k+1} a^{k+1-r} b^r && \text{ajout du premier et dernier terme}\\
&= \text{P}(k+1)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la seconde condition de l'axiome d'induction est vérifiée : si la formule du binôme est valable avec $n = k,(0 < n \leq k)$ elle l'est nécessairement avec $n = k+1$, c'est-à-dire que $\text{P}(k) \Longrightarrow \text{P}(k+1)$.

Nous avons montré que les deux conditions de l'axiome d'induction mathématique sont satisfaites, nous pouvons donc conclure que $\text{P}(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Exemple 8.38

Développez $(2x-3)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton ?

Solution proposée : Appliquons la formule de Newton $\sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$ avec $n = 5$ où le rôle de a sera joué par $2x$ et celui de b par -3. Ainsi

$$\begin{aligned}
(2x-3)^5 &= \sum_{r=0}^{5} C_r^5 (2x)^{5-r} (-3)^r\\
&= C_0^5 (2x)^{5-0}(-3)^0 + C_1^5 (2x)^{5-1}(-3) + C_2^5 (2x)^{5-2}(-3)^2 + C_3^5 (2x)^{5-3}(-3)^3 + C_4^5 (2x)^{5-4}(-3)^4 + C_5^5 (2x)^{5-5}(-3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2x)^5 + 5\,(2x)^4(-3) + 10\,(2x)^3(-3)^2 + 10\,(2x)^2(-3)^3 + 5\,(2x)(-3)^4 + (-3)^5\\
&= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243
\end{aligned}$$

Exemple 8.39

Soit le binôme $\left(x - \frac{1}{x}\right)^9$.

(a) Trouvez le 6$^{\text{e}}$ terme de la forme développée de ce binôme.

(b) Trouvez le terme en x de la forme développée de ce binôme.

Solution proposée : (a) Le 6$^{\text{e}}$terme est obtenu avec $r = 5$ dans la formule du binôme.

$$\begin{aligned} C_5^9 x^{9-5}(-x^{-1})^5 &= 126x^4(-x^{-1})^5 \\ &= -\frac{126}{x} \end{aligned}$$

(b) Pour trouver le terme en x de la forme développée de ce binôme, il faut trouver r afin que $C_r^9 x^{9-r}(-x^{-1})^r = (-1)^r C_r^9 x$. Alors, il faut nécessairement que

$$\begin{aligned} x^{9-r}(x^{-1})^r &= x \\ \iff \quad x^{9-2r} &= x \\ \iff \quad 9-2r &= 1 \\ \iff \quad r &= 4 \end{aligned}$$

Le terme en x cherché est donc $(-1)^4 C_4^9 x = 126x$.

Exemple 8.40

À l'aide de la formule du binôme, montrez l'identité

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Solution proposée : Puisque $2^n = (1+1)^n$, appliquons la formule du binôme $\sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$ où le rôle de a sera joué par 1 et celui de b par 1 également. Ainsi

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} C_r^5 1^{n-r} 1^r \\ &= C_0^n 1^{n-0} 1^0 + C_1^n 1^{n-1} 1 + C_2^n 1^{n-2} 1^2 + C_3^n 1^{5-3} 1^3 + \ldots + C_n^n 1^{n-n} 1^n \\ &= C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n \end{aligned}$$

Exemple 8.41

Rappelons que chez HARVEYS, le client choisit lui-même les ingrédients qu'il désire mettre dans son hamberger. En considérant seulement les ingrédients suivants :

moutarde, relish, oignon, tomate, laitue, cornichon et piment fort

combien de hambergers différents le restaurant peut-il offrir ?

Solution proposée : Le client peut très bien commander un hamberger nature sans aucun de ces ingrédients comme il peut en commander avec 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 parmi les 7 ingrédients de la liste précédente. Alors, le nombre d'hambergers différents que le restaurant peut offrir est

$$C_0^7 + C_1^7 + C_2^7 + C_3^7 + \ldots + C_7^7 = 2^7 = 128 \text{ hambergers différents}$$

Exercices suggérés : 1 à 10 à la page 352

8.12 Exercices série 8.6

1. Développer et simplifier en utilisant la formule du binôme de Newton

   a) $(x+y)^7$
   b) $(2x^2-3)^6$
   c) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^6$
   d) $\left(x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^6$

2. Trouver seulement le terme indiqué de chacun des développement suivant.

   a) Le 5$^{\text{e}}$ terme de $(a-2b)^7$.
   b) Le terme du milieu de $(x^2+3)^{12}$.
   c) Le terme contenant x dans $\left(x^3-\dfrac{1}{2x}\right)^7$.
   d) Le terme indépendant de a et de b dans $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^{10}$

3. Sachant que les coefficients du 6$^{\text{e}}$ et du 16$^{\text{e}}$ terme du développement de $(a-b)^n$ sont égaux, trouver le 3$^{\text{e}}$ terme.

4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, évaluer
   a) 101^3 b) 98^4

5. Montrer l'identité suivante à l'aide de la formule du binôme de Newton

$$C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + \ldots \pm C_n^n = 0$$

6. Faire une preuve directe de l'identité de Pascal

$$C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} = C_r^n$$

7. Combien de sommes (montant d'argent) différentes peut-on tirer d'un sac qui contient une pièce de 2\$, une de 1\$, une de 50¢, une de 25¢, une de 10¢, une de 5¢ et une de 1¢ ?

8. À la pizzeria Chez Tony, le restaurant offre aux clients la possibilité de commander une pizza avec le choix suivant de garnitures : pepperoni, champignon, poivron vert, piment fort, oignon, anchois, capicolli, bacon et olive noire. Il est bien sûr possible de commander une pizza sans aucune de ces garnitures (pizza de base avec seulement la sauce aux tomates). Avec ce choix de garnitures, combien de déclinaisons différentes de pizzas Tony peut-il faire ?

9. Résoudre pour n les équations suivantes.

   a) $C_6^{n-1} + C_5^{n-1} = C_{12}^n$.
   b) $3\left(C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n\right) = 2^{n-1}\left(C_1^{n-1} + C_2^{n-1}\right)$.

10. Démontrer l'identité $C_{r+2}^{n+2} = C_r^n + 2C_{r+1}^n + C_{r+2}^n$.

8.12.1 Combinaisons avec répétitions

Une combinaison avec répétitions de r objets pris dans un ensemble de n objets distincts est une disposition non ordonnée de ces r objets où, si un objet de l'ensemble donné est choisi, nous pouvons le choisir plus d'une fois. En conséquence, lorsqu'il s'agit d'une combinaison avec répétitions, le nombre r d'objets peut être supérieur au nombre d'objets contenu dans l'ensemble en question.

Considérons l'ensemble suivant de quatre objets distincts $\{A, B, C, D\}$.

$$\lceil \text{ABC} \rfloor, \lceil \text{AAD} \rfloor$$

sont deux exemples de combinaisons avec répétitions de 3 objets pris dans l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

De même

$$\lceil \text{AAACCD} \rfloor$$

est un exemple d'une combinaison avec répétitions de 6 objets pris dans ce même ensemble $\{A, B, C, D\}$.

Nous allons maintenant déterminer une formule permettant de dénombrer de telles combinaisons. Sans perte de généralité, considérons les combinaisons avec répétitions de 6 objets pris dans l'ensemble de 4 objets distincts $\{A, B, C, D\}$. Pour plus de clarté, nous omettrons les crochets sup ($\lceil$) et inf($\rfloor$).

Soit la séquence blanche suivante de 6 objets

$$\text{— — — — — —}$$

à être remplie avec des objets choisis de l'ensemble donné. De gauche à droite, insérons dans la séquence blanche le caractère <#> pour signifier, dans l'ordre, le nombre de répétitions de chacun des objets A, B, C et D dans la combinaison avec répétitions. Par exemple

$$\text{— — \# — — — —} \quad \text{représente la combinaison } \lceil \text{AABBBB} \rfloor$$

Si la séquence débute avec le séparateur «#», cela signifiera que l'objet A n'est pas choisie. D'autre part, l'utilisation ailleurs de deux séparateurs ou plus signifiera que deux objets ou plus n'ont pas été, dans l'ordre choisies.

Donnons-nous quelques exemples pour bien comprendre l'astuce que nous sommes en train de mettre en place.

$$\begin{array}{rl}
\text{\# — \# — — — — —} & \text{représente BCCCCC} \\
\text{\# \# — — — — — —} & \text{représente CCCCCCC} \\
\text{— — — — \# — —} & \text{représente AAAABB} \\
\text{— \# — — \# — — \# —} & \text{représente ABBCCD} \\
\text{\# \# \# — — — — — — —} & \text{représente DDDDDD}
\end{array}$$

Puisque l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ possède **4** objets (distincts), nous avons besoin au plus de **3** séparateurs pour représenter n'importe quelle combinaison avec répétitions de 6 objets. Même si nous avions traité au début de combinaisons avec répétitions de trois ou de vingt objets de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, il nous aurait fallu aussi trois séparateurs pour représenter toutes telles combinaisons avec répétitions. En fait, le nombre de séparateurs requis est toujours égale au nombre d'objets de l'ensemble moins 1, soit $n - 1$.

Après tous ces efforts déployés, nous sommes maintenant en mesure de dénombrer le nombre de combinaisons avec répétitions de 6 objets de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. Il est maintenant compréhensible que toutes permutations discernables de la séquence

$$\text{\# \# \# — — — — — — —}$$

correspond à une combinaison avec répétitions de 6 objets pris dans l'ensemble {A, B, C, D}. Nous avons deux catégories d'objets «#» et «—» comportant respectivement 3 et 6 objets. Le nombre de permutations discernables est alors donné par

$$\frac{9!}{3!\,6!} = 84$$

Nous pouvons donc conclure qu'il y a 84 combinaisons avec répétitions de 6 objets pris dans l'ensemble {A, B, C, D}.

Obtenons avec MAPLE ces 84 combinaisons avec répétitions. L'expression MAPLE A$6 est équivalent à $\overbrace{A,A,A,A,A,A}^{6\text{ fois}}$. L'opérateur MAPLE $ (de répétition) est utilisé par concision d'écriture.

```
> L:=choose([A$6,B$6,C$6,D$6],6):
  for i from 1 by 6 to nops(L) do
   lprint(seq(cat(op(op(k,L))),k=i..i+5));
  od;
AAAAAA, AAAAAB, AAAAAC, AAAAAD, AAAABB, AAAABC
AAAABD, AAAACC, AAAACD, AAAADD, AAABBB, AAABBC
AAABBD, AAABCC, AAABCD, AAABDD, AAACCC, AAACCD
AAACDD, AAADDD, AABBBB, AABBBC, AABBBD, AABBCC
AABBCD, AABBDD, AABCCC, AABCCD, AABCDD, AABDDD
AACCCC, AACCCD, AACCDD, AACDDD, AADDDD, ABBBBB
ABBBBC, ABBBBD, ABBBCC, ABBBCD, ABBBDD, ABBCCC
ABBCCD, ABBCDD, ABBDDD, ABCCCC, ABCCCD, ABCCDD
ABCDDD, ABDDDD, ACCCCC, ACCCCD, ACCCDD, ACCDDD
ACDDDD, ADDDDD, BBBBBB, BBBBBC, BBBBBD, BBBBCC
BBBBCD, BBBBDD, BBBCCC, BBBCCD, BBBCDD, BBBDDD
BBCCCC, BBCCCD, BBCCDD, BBCDDD, BBDDDD, BCCCCC
BCCCCD, BCCCDD, BCCDDD, BCDDDD, BDDDDD, CCCCCC
CCCCCD, CCCCDD, CCCDDD, CCDDDD, CDDDDD, DDDDDD
```

```
> nops(L);
                                    84
```

Nous pouvons déduire une formule générale donnant le nombre de combinaisons avec répétitions de r objets pris dans un ensemble comportant n objets distincts. Notons par K_r^n le nombre de ces combinaisons. Puisqu'il nous faut $(n-1)$ séparateurs, nous avons donc deux catégories d'objets identiques comportant respectivement $(n-1)$ et r objets. Nous avons donc au total $(n-1)+r$ objets à permuter. Le nombre de permutations discernables de ces $(n+r-1)$ objets est alors donné par le calcul suivant

$$\begin{aligned} K_r^n &= P_{n+r-1;n-1,r} \\ &= \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} \\ &= C_r^{n+r-1} \end{aligned}$$

Le théorème suivant résume la stratégie de calcul pour déterminer le nombre de combinaisons avec répétitions de r éléments pris dans un ensemble de n éléments distincts.

Théorème 7 (Combinaisons avec répétitions)**.** *Le nombre de combinaisons avec répétitions de r objets pris dans un ensemble de n objets distincts, notée K_r^n, est donné par*

$$K_r^n = C_r^{n+r-1}, \quad r > 0$$

Exemple 8.42

Combien y a-t-il de façons de répartir 3 billes identiques dans 6 casiers discernables ?

Solution proposée : Numérotons les casiers comme suit : $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4, \mathrm{C}_5, \mathrm{C}_6$. Alors, une façon de répartir les 3 billes correspond à une combinaison avec répétitions de 3 objets parmi les objets de l'ensemble $\{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4, \mathrm{C}_5, \mathrm{C}_6\}$. Par exemple, la combinaison $\lceil \mathrm{C}_1\mathrm{C}_5\mathrm{C}_5 \rfloor$, correspond à déposer une bille dans le casier 1 et 2 billes dans le casier 5. Calculons alors le nombre de combinaisons avec répétitions de 3 objets pris dans un ensemble en contenant 6 distincts.

$$\begin{aligned} K_3^6 &= C_3^{6+3-1} \\ &= C_3^8 \\ &= 56 \end{aligned}$$

Il y a donc 56 façons de répartir 3 billes dans les six casiers.

Exemple 8.43

Les dominos sont un jeu de société d'origine chinoise. Les dominos sont des pièces rectangulaires sur lesquelles figurent, sur une de leurs faces, deux ensembles de points séparés par un trait. le nombre de points est un nombre parmi ceux de l'ensemble {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, mais on trouve des variantes allant de 0 à 9, de 0 à 12, de 0 à 15 et de 0 à 18.

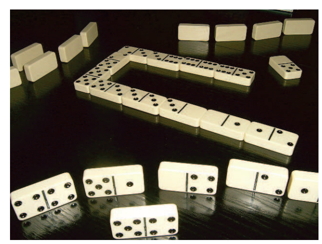


FIG. 9: Dominos

a) Dans la variante du jeu 0 à 6, combien y a-t-il de dominos différents ?

b) Dans la variante du jeu 0 à 9, combien y a-t-il de dominos de plus ?

Solution proposée :

a) Les pièces sont fabriquées en disposant côte à côte deux éléments de l'ensemble {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si nous retournons un domino, nous changeons l'ordre des deux éléments, mais le domino reste identique. Alors, le nombre de dominos correspond au nombre de combinaisons avec répétitions de 2 objets choisis dans un ensemble de 7 objets distincts.

$$\begin{aligned} K_2^7 &= C_2^{7+2-1} \\ &= C_2^8 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Il y a donc 28 pièces différentes à la variante 0 à 6 du jeu de dominos.

b) Avec la variante 0 à 9 , il y a

$$\begin{aligned} K_2^{10} - 28 &= C_2^{11} - 28 \\ &= 55 - 28 \\ &= 27 \text{ pièces de plus} \end{aligned}$$

Exercices suggérés : 1 à 10 à la page 361

8.13 Partitions

Partitionner un ensemble, c'est répartir tous ses éléments en un certain nombre de sous-ensembles disjoints deux à deux de telle sorte que la réunion de tous ces sous-ensembles recompose l'ensemble lui-même.

Par exemple, soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Les trois sous-ensembles suivants A = {1, 2}, B = {3, 4} et C = {5, 6} forment une partition de E. Aussi, les sous-ensembles F={1} et G={2, 3, 4, 5, 6,} forment également une partition de l'ensemble E.

Définition 7 (Partition)**.** *Soit un ensemble E quelconque non-vide.* $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ *est une partition de E si et seulement si nous avons les conditions suivantes :*

i) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, A_i \neq \emptyset$ *(Chaque élément de la partition rest non vide)*

ii) $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$ *(Les éléments dont disjoints deux à deux)*

iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ *(La réunion des éléments recompose l'ensemble E)*

8.13.1 Partitions ordonnées

Définition 8 (Partition ordonnée)**.** *On appelle partition ordonnée d'un ensemble d'objets distincts toute partition dans laquelle on tient compte de l'ordre des sous-ensembles formant la partition.*

Exemple 8.44

Il y a un ensemble de neuf différents jouets à partager entre quatre enfants. On décide de le faire comme suit : le plus jeune en recevra trois et les autres, chacun deux.

Il s'agit d'une partition ordonnée. En effet, considérons, par exemple, la partition suivante de l'ensemble des jouets $\{J_1, J_2, J_3, \ldots, J_9\}$

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \text{ où } \begin{cases} A_1 = \{J_2, J_4, J_8\} \\ A_2 = \{J_1, J_6\} \\ A_3 = \{J_3, J_5\} \\ A_4 = \{J_7, J_9\} \end{cases}$$

C'est une partition qui permet de donner au plus jeune 3 jouets et aux autres chacun deux. Il y a, bien sûr, beaucoup d'autres partitions possibles. Nous les dénombrons un peu plus loin. Or, avec cette seule partition, il y a 3! façons de voir les trois plus jeunes recevoir chacun deux jouets. Pour partager les jouets, il nous faut donc tenir compte de l'ordre des sous-ensembles A_2, A_3 et A_4.

Répondons maintenant à la question suivante. Combien y a-t-il de partitions ordonnées à l'exemple précédent ? La formation d'une telle partition ordonnée est simplement réalisée en quatre opérations :

I. choisir 3 jouets parmi les 9 pour le plus jeune : C_3^9
II. choisir 2 jouets parmi les 6 qui restent pour un des autres enfants : C_2^6
III. choisir 2 jouets parmi les 4 qui restent pour un des deux autres enfants : C_2^4
IV. choisir 2 jouets parmi les 2 qui restent pour le dernier enfant : C_2^2

Il y a donc

$$C_3^9 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 = \frac{9!}{\cancel{6}!\,3!} \times \frac{\cancel{6}!}{\cancel{4}!\,2!} \times \frac{\cancel{4}!}{\cancel{2}!\,2!} \times \frac{\cancel{2}!}{0!\,2!} = \frac{9!}{3!\,2!^3} = 7\,560$$

partitions ordonnées. Il y a donc 7 560 manières de partager les neuf jouets entre les quatre enfants où le plus jeune en recevra trois et les autres chacun deux.

Généralisons ce calcul.

Considérons un ensemble de n objets distincts. Nous voulons dénombrer le nombre de partitions ordonnées en k sous-ensembles $\lceil A_1, A_2, A_3, \ldots A_k, \rfloor$ ayant respectivement $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ objets où $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$.

La formation d'une partition ordonnée de k sous-ensembles est réalisée en k opérations :

1. choisir n_1 objets parmi les n pour le sous-ensemble devant en contenir n_1 : $C_{n_1}^n$
2. choisir n_2 objets parmi les $n - n_1$ qui restent pour le sous-ensemble devant en contenir n_2 : $C_{n_2}^{n-n_1}$
3. choisir n_3 objets parmi les $n - n_1 - n_2$ qui restent pour le sous-ensemble devant en contenir n_3 : $C_{n_3}^{n-n_1-n_2}$

$\vdots$

k-1. choisir n_{k-1} objets parmi les $n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-2}$ qui restent pour le sous-ensemble devant en contenir n_{k-1} : $C_{n_{k-1}}^{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-2}}$

k. choisir n_k objets parmi les $n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-2} - n_{k-1} = n_k$ pour le sous-ensemble devant en contenir n_k : $C_{n_k}^{n_k}$

Il y a donc

$$\begin{aligned} C_{n_1}^n \times C_{n_2}^{n-n_1} \times C_{n_3}^{n-n_1-n_2} \times \ldots \times C_{n_k}^{n_k} &= \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \times \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \times \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\,\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \times \ldots \\ &\quad \times \frac{\cancel{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-2})!}}{n_{k-1}!\,\cancel{n_k!}} \times \frac{\cancel{n_k!}}{0!\,n_k!} \\ &= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,\ldots\,n_{k-1}!\,n_k!} \end{aligned}$$

partitions ordonnées. Voilà qui complète la preuve du théorème suivant.

Théorème 8 (Partitions ordonnées)**.** *Soit n, le nombre d'objets distincts d'un ensemble E. Le nombre de partitions ordonnées tel que l'on ait*

i_1 *sous-ensembles à* n_1 *objets*
i_2 *sous-ensembles à* n_2 *objets*
i_3 *sous-ensembles à* n_3 *objets*
$\vdots$
i_p *sous-ensembles à* n_p *objets*

est donné par

$$\frac{n!}{n_1!^{i_1}\ n_2!^{i_2}\ n_3!^{i_3}\ \ldots\ n_p!^{i_p}} \text{ où } i_1 \times n_1 + i_2 \times n_2 + i_3 \times n_3 + \ldots + i_p \times n_p = n$$

Exemple 8.45

À l'occasion d'une classe de neige, 12 élèves doivent être partager en deux groupes de 6 élèves. L'un des groupes fera du ski de fond et l'autre fera une randonnée de raquettes. De combien de manières peut-on faire ce partage ?

Solution proposée : Il s'agit de dénombrer le nombre de partitions ordonnées de 12 personnes en deux sous-ensembles de 6 puisque chaque sous-ensemble est assigné à une activité distincte. Cela peut être réalisée de

$$\frac{12!}{6!^2} = 924 \text{ manières}$$

Exemple 8.46

À leur première réunion en début de la rentrée scolaire, les onze membres de l'exécutif de l'association étudiante du cégep de Maisonneuve (SOGÉÉCOM) se répartissent quatre dossiers prioritaires de la prochaine année scolaire :

- 4 d'entre eux travailleront sur le dossier du gel des frais de scolarité et des prêts et bourses ;
- 3 d'entre eux auront la responsabilité du journal étudiant (Trait-d'union) ;
- 2 d'entre eux travailleront à la gestion des événements culturels (partys, soirées thématiques, spectacles, soirées-cinéma, etc.)
- et 2 autres travailleront à la défense des droits individuels (scolaire, pédagogique, discriminatoire, etc).

De combien de manières l'exécutif a-t-il de manières de se répartir ?

Solution proposée : Il s'agit de dénombrer le nombre de partitions ordonnées de 11 objets (les 11 membres de l'exécutif) comprenant des sous-ensembles de 4, 3, 2 et 2 objets. C'est parce chaque sous-ensemble de la partition est assigné à un dossier distinct qu'il s'agit d'une partition ordonnée. L'exécutif a donc

$$\frac{11!}{4!\,3!\,2!^2} = 69\,300 \text{ manières de se répartir.}$$

8.13.2 Partitions non ordonnées

Définition 9 (Partition non ordonnée)**.** *On appelle partition non ordonnée d'un ensemble d'objets distincts toute partition dans laquelle on ne tient pas compte de l'ordre des sous-ensembles formant la partition.*

Reprenons l'exemple de la page 356 où il a été question de partager 9 jouets entre quatre enfants. Mais ici, nous allons considérer seulement le tri de ces jouets en quatre piles sans assigner les jouets à des enfants.

Exemple 8.47

Soit un ensemble de 9 jouets où il est demandé de les trier en une pile de 3 jouets et en trois piles de 2 jouets chacun.

Il s'agit d'une partition non ordonnée. En effet, considérons, par exemple, la partition suivante

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \text{ où } \begin{cases} A_1 &= \{J_2, J_4, J_8\} \\ A_2 &= \{J_1, J_6\} \\ A_3 &= \{J_3, J_5\} \\ A_4 &= \{J_7, J_9\} \end{cases}$$

Cette partition donne une manière de trier les jouets en une pile de 3 jouets et trois piles de 2 jouets chacun mais, cette fois, nous n'avons pas à tenir compte des permutations des "tas" A_2, A_3 et A_4 puisque nous n'avons pas à "personnaliser" ces sous-ensembles.

Pour dénombrer le nombre de manières de trier ces 9 jouets en 4 piles tel que demandé, il suffit de diviser le nombre de partitions ordonnées déjà calculées (voir page 356) par le nombre de permutations de chaque catégorie de piles. C'est tout comme dans le cas d'un calcul d'anagrammes : les sous-ensembles ayant un même nombre d'éléments seront traités comme des objets indiscernables entre eux :

- 1 sous-ensemble de 3 jouets (objet d'un premier groupe)
- 3 sous-ensembles de 2 jouets (objets d'un second groupe)

$$\frac{\frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!}}{1!\,3!} = \frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!\,1!\,3!} = \frac{9!}{3!^1\,2!^3\,1!\,3!} = \frac{7\,560}{6} = 1\,260$$

Il y a donc 1 260 manières de trier les neuf jouets en une pile de 3 jouets et trois de 2 jouets chacun.

Généralisons le dénombrement du nombre de partitions non ordonnées.

Théorème 9 (Partitions non ordonnées). *Soit n, le nombre d'objets distincts d'un ensemble E. Le nombre de partitions non ordonnées tel que l'on ait*

i_1 *sous-ensembles à* n_1 *objets (premier groupe de sous-ensembles indiscernables),*

i_2 *sous-ensembles à* n_2 *objets (deuxième groupe de sous-ensembles indiscernables),*

i_3 *sous-ensembles à* n_3 *objets (troisième groupe de sous-ensembles indiscernables),*

$\vdots$

i_p *sous-ensembles à* n_p *objets (p-ième groupe de sous-ensembles indiscernables)*

est donné par

$$\frac{n!}{n_1!^{i_1}\, n_2!^{i_2}\, n_3!^{i_3}\, \ldots\, n_p!^{i_p}\, i_1!\, i_2!\, i_3! \ldots\, i_p!} \text{ où } i_1 \times n_1 + i_2 \times n_2 + i_3 \times n_3 + \ldots + i_p \times n_p = n$$

Exemple 8.48

Lors d'une journée sportive dans une école secondaire, un professeur doit diviser un groupe de 12 élèves en deux équipes de 6 afin de jouer un match de volley-ball. De combien de manières peut-il faire ce partage si les deux équipes jouent ensembles ?

Solution proposée : Il s'agit de faire une partition de 12 élèves en 2 sous-ensembles de 6 où l'ordre des sous-ensembles importe pas : les deux équipes vont jouer ensemble. Le professeur pourra réaliser le partage en

$$\frac{12!}{6!^2\, 2!} = 642 \text{ manières}$$

Exemple 8.49

On répartie au hasard 10 enveloppes en 3 paquets. De combien de façons peut-on le faire si l'un des paquets doit contenir 4 lettres et les deux autres 3 ?

Solution proposée : Il s'agit de dénombrer le nombre de partitions non ordonnées d'un ensemble de 10 objets en un sous-ensemble de 4 objets et deux sous-ensembles de 3. Il y a donc

$$\frac{10!}{4!\, 3!^2\, 2!} = 2\,100 \text{ façons de le faire.}$$

Exercices suggérés **:** ***1 à 6 à la page 361***

8.14 Exercices série 8.7

1. Avant la sieste de l'après-midi dans une maternelle, les enfants doivent collaborer au rangement des jouets dans les grandes boîtes prévues à cet effet. Évidemment, cette activité pour les enfants est seulement une activité de motricité et les jouets sont donc déposés au hasard dans les boîtes. Il y a six grandes boîtes placées le long d'un mur. Tous les jouets sont différents et on en compte une vingtaine. De combien de manières différents les enfants peuvent-ils déposer les jouets dans les boîtes
   a) si on ne tient compte seulement que du nombre de jouets qu'il y a dans chaque boîte ?
   b) si on tient compte à la fois du nombre de jouets dans chaque boîte ainsi que du type de jouet ?
2. Dans sa classe de troisième, l'enseignant fait tirer parmi ses 22 élèves quatre bons d'achat de 10$ chacun à l'occasion de Noël. Après chaque tirage d'un nom, le nom du gagnant est remis dans la boîte au tirage. L'enseignant remettra plus tard à la direction la liste des gagnants. Combien de listes différentes pourraient être remises à la direction ?
3. Il faut répartir douze lettres en quatre paquets : l'un des paquets doit avoir six lettres et les trois autres deux. Dans ces conditions, combien y a-t-il de répartitions possibles ?
4. De combien de façons douze enveloppes réparties en trois paquets de cinq, quatre et trois enveloppes peuvent-elles être distribuées dans trois maisons ?
5. Six nouveaux élèves doivent être répartis dans trois classes. Combien y a-t-il de manières de le faire
   a) si chaque classe doit en recevoir deux ?
   b) s'il n'y a aucune restriction ?
6. On distribue les cinquante-deux cartes d'un jeu au quatre joueurs. Chacun reçoit treize cartes. Quel est le nombre de distributions possibles ?