Nous allons maintenant développer une méthode de calcul du reste de la division d'un polynôme P (d°(P)$\geq$ 1) par un polynôme de la forme $(x-a)$ qui va permettre, en plus d'avoir le reste, d'avoir en même temps le polynôme quotient.

4.9 Substitution synthétique et schéma de Horner

La disposition pratique qui va permettre d'obtenir rapidement le reste $\mathrm{P}(c)$ de la division d'un polynôme P par $(x-c)$ est appelée **substitution synthétique**. Mais, avant de présenter cette disposition, illustrons d'abord, avec un exemple, l'écriture d'un polynôme en schéma de Horner.

Le développement d'un polynôme en schéma de Horner évite l'utilisation des puissances pour l'indéterminée. Le schéma de Horner du polynôme se limite aux seules opérations de multiplication et d'addition.

Par exemple, le développement en schéma complet de Horner de $\mathrm{P} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est

$$\mathrm{P} = ((a_3\,x + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0$$

Ce schéma s'obtient de la manière suivante.

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0 \\ &= ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

Ainsi, le calcul de $\mathrm{P}(c)$ effectué avec cette formulation du polynôme $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ donne $\mathrm{P}(c) = ((a_3\,c + a_2)\,c + a_1)\,c + a_0$.

Voici maintenant la disposition pratique pour calculer synthétiquement $\mathrm{P}(c)$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & a_3c & (a_3c+a_2)c & ((a_3c+a_2)c+a_1)c \\
\hline
c & a_3 & a_3c+a_2 & (a_3c+a_2)c+a_1 & \underbrace{((a_3c+a_2)c+a_1)c+a_0}_{\mathrm{P}(c)}
\end{array}
$$

Cette manière de procéder pour le calcul de $\mathrm{P}(c)$ trouve une première utilité. Répondons à la question suivante : le polynôme $x+1$ est-il un facteur du polynôme $\mathrm{P} = 4x^3 - x^2 - 3x + 2$? Puisqu'il suffit de montrer que $\mathrm{P}(-1) = 0$ pour conclure que $x+1$ est un facteur, utilisons la *substitution synthétique* afin de déterminer si $\mathrm{P}(-1) = 0$.

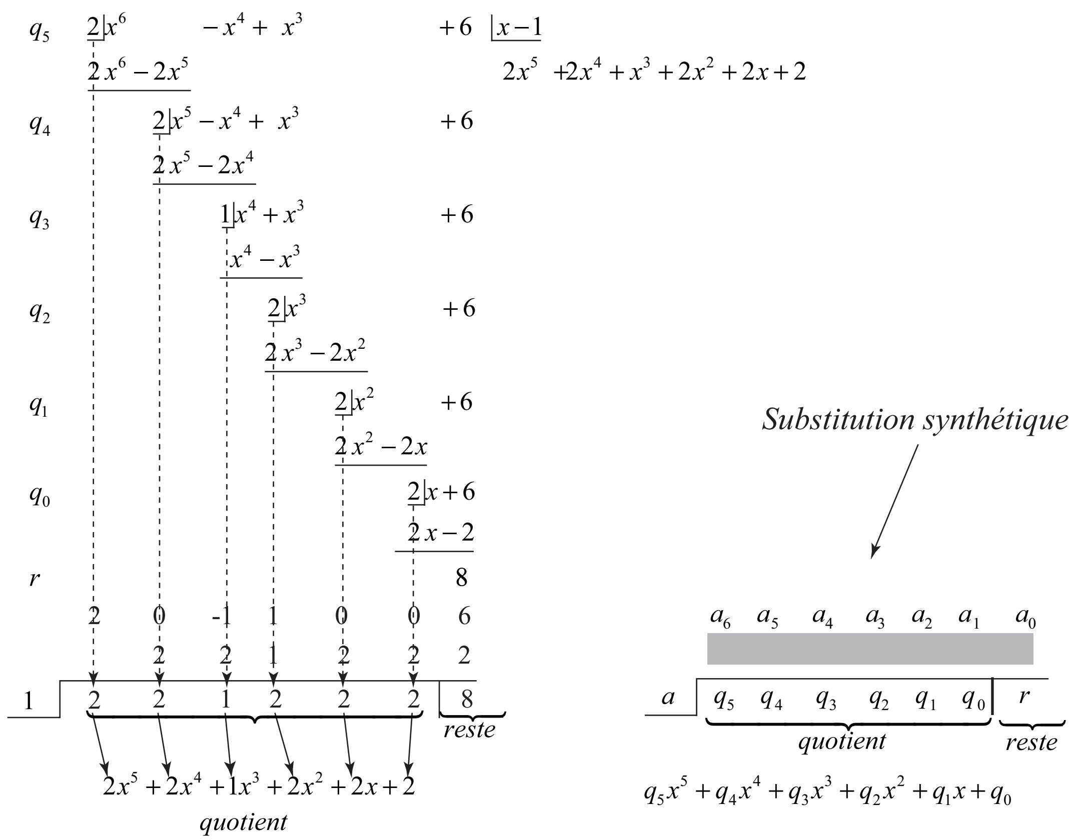
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -1 & -3 & 2 \\
 & & -4 & 5 & -2 \\
\hline
-1 & 4 & -5 & 2 & \underset{\mathrm{P}(-1)}{0}
\end{array}
$$

Ce que montre clairement que $\mathrm{P}(-1) = 0$ et, sur la base du théorème de factorisation, on peut conclure que $(x-(-1)) = (x+1)$ est bien un facteur du polynôme $4x^3 - x^2 - 3x + 2$.

Attention : Lorsqu'on écrit un polynôme, il est convenu d'omettre les termes pour lesquels les coefficients sont nuls. Mais, pour utiliser la disposition de la substitution synthétique, il est nécessaire d'écrire sur la première ligne tous les coefficients du polynôme en ordre décroissant des puissances de l'indéterminé même si certains sont nuls. De cette façon, sur la dernière ligne, sera reproduit le **schéma complet de Horner** du polynôme.

Exemple 4.10

Déterminons le reste de la division $(2x^6 - x^4 + x^3 + 6) \div (x-1)$. Effectuons d'abord la division polynomiale.



Ce qui montre que le reste est 8.

D'autre part, avec la substitution synthétique, nous devons respecter la disposition suivante correspondant formellement au polynôme dividende.

$$2x^6 - x^4 + x^3 + 6 = 2x^6 + 0x^5 - x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr|r}
 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
 & & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 8
\end{array}$$

Avec la disposition de la substitution synthétique, on y trouve bien plus que la valeur du reste $P(a)$ de la division de P par $(x-a)$. Tous les nombres de la dernière ligne, sauf le dernier évidemment, correspondent aux coefficients du polynôme quotient dont le degré est de une unité inférieure à celui du dividende. En effet, à chaque étape de la disposition de la division euclidienne, chacun de ces nombres correspondent exactement au coefficient dominant de chacun des polynômes quotients intermédiaires $q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, \ldots, q_1, q_0$.

Lorsque le diviseur est de la forme $(x-a)$, on formule donc plus rapidement la division $P \div (x-a)$ sous la forme de l'algorithme de la division en utilisant la disposition de la substitution synthétique. Ainsi, on peut donc écrire

$$(2x^6 - x^4 + x^3 + 6) = (x-1)(2x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2) + 8$$

La disposition de la substitution synthétique porte également le nom de ***division synthétique de Horner***.

L'exemple suivant va permettre d'introduire une autre définition de l'univers des polynômes.

Exemple 4.11

Soit le polynôme $P = 4x^5 - 16x^4 + x^3 - x^2 - 11x - 4$. Obtenons $P(-\frac{1}{2})$ avec la division synthétique de Horner.

$$\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 4 & -16 & 1 & -1 & -11 & -4 \\
 & & -2 & 9 & -5 & 3 & 4 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 4 & -18 & 10 & -6 & -8 & 0
\end{array}$$

Puisque $P(-\frac{1}{2}) = 0$, le nombre $-\frac{1}{2}$ est une racine du polynôme P et $(x+\frac{1}{2})$ est donc un facteur de ce polynôme. La division synthétique de Horner révélant le polynôme quotient $Q = 4x^4 - 18x^3 + 10x^2 - 6x - 8$, on peut donc écrire

$$4x^5 - 16x^4 + x^3 - x^2 - 11x - 4 = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)(4x^4 - 18x^3 + 10x^2 - 6x - 8)$$

Calculons maintenant $Q(-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 4 & -18 & 10 & -6 & -8 \\
 & & -2 & 10 & -10 & 8 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 4 & -20 & 20 & -16 & 0
\end{array}$$

Puisque $Q(-\frac{1}{2}) = 0$, le nombre $-\frac{1}{2}$ est aussi une racine du polynôme quotient Q et $(x+\frac{1}{2})$ est donc facteur du polynôme quotient. Alors, le facteur $(x+\frac{1}{2})$ apparaît donc une deuxième fois dans la factorisation du polynôme P et on peut écrire

$$\begin{aligned}
4x^5 - 16x^4 + x^3 - x^2 - 11x - 4 &= \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(4x^3 - 20x^2 + 20x - 16) \\
&= \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2(4x^3 - 20x^2 + 20x - 16)
\end{aligned}$$

La précédente division synthétique révèle un nouveau polynôme quotient $Q' = 4x^3 - 20x^2 + 20x - 16$. Calculons $Q'(-\frac{1}{2})$ pour voir.

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 4 & -20 & 20 & -16 \\
 & & -2 & 11 & -\frac{31}{2} \\
\hline
-\frac{1}{2} & 4 & -22 & 31 & -\frac{63}{2}
\end{array}$$

Puisque $Q'(-\frac{1}{2}) \neq 0$, le nombre $-\frac{1}{2}$ n'est pas une racine du polynôme quotient Q' et, dans ce cas, $(x+\frac{1}{2})$ n'est donc pas facteur de ce dernier quotient. Cela montre que la racine $-\frac{1}{2}$ apparaît exactement deux fois dans la factorisation du polynôme P et pas une fois de plus. Dans une telle situation, on dit du nombre $-\frac{1}{2}$ qu'il est une racine multiple. Puisque qu'il apparaît exactement deux fois, on dit du nombre $-\frac{1}{2}$ qu'il est racine multiple d'ordre 2.

Définition 5 (Racine d'ordre m)**.** *On dit que r est une racine d'ordre m* $(m \in \mathbb{N}^*)$ *de* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ *lorsque* $(x-r)^m$ *divise P et que* $(x-r)^{m+1}$ *ne divise pas P.*

Par exemple, le polynôme $\mathrm{P} = 2x^3(x+1)^3(x-2)^2(x-\frac{1}{3})$ est un polynôme de degré 9 qui possède quatre racines distinctes : $0, -1, 2$ et $\frac{1}{3}$. L'ordre de multiplicité de ces racines sont les suivants : 0 est d'ordre 3, -1 est d'ordre 3, 2 est d'ordre 2 et $\frac{1}{3}$ est d'ordre 1.

Lorsqu'une racine est d'ordre 1, on dit de cette racine qu'elle est une racine simple.