Fonction arcsec… vous connaissez ?

Pierre Lantagne

12/10/2020

Résumé

Ce document s'adresse tout particulièrement aux élèves de niveau cégep et a pour but d'apporter un enrichissement à la compréhension des fonctions circulaires sécante et arcsécante. D'abord, nous ferons un rappel sur les fonctions sec et arcsec ainsi que sur leur dérivée. Ensuite, nous exposerons en détails l'intégrale indéfinie de arcsec. Finalement, nous confronterons la primitive obtenue « manu scriptus » avec celle que donne le logiciel Maple.

Cette « confrontation » et l'analyse de la réponse de Maple à $\int D_x(\operatorname{arcsec} x)\,\mathrm{d}x$ sera l'occasion de mettre en évidence certaines conséquences inattendues de la simplification automatique dans $\mathbb{C}$ lorsque l'utilisateur envisage de faire des calculs dans $\mathbb{R}$ avec Maple.

À partir du graphique de $y = \cos x$ et de l'identité trigonométrique $\dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, nous déduisons facilement le graphique de $y = \sec x$

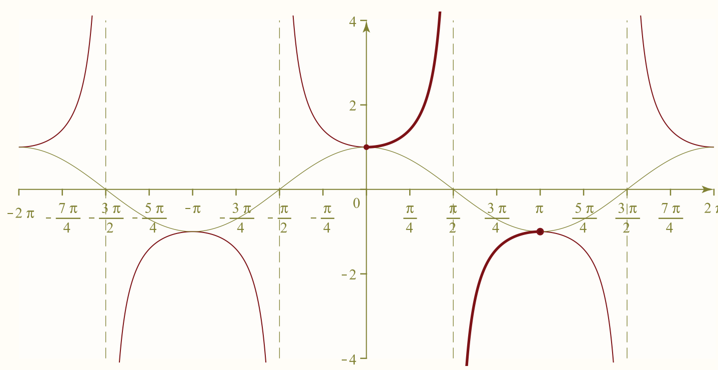

FIG. 1 : *Tracé de* $y = \sec x$

Clairement, la fonction sécante dont le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ne possède pas de réciproque. La FIG. 1 montre que si l'on restreint le domaine naturel de la sécante à l'ensemble $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, l'injectivité de la sécante sur ce domaine restreint permet de définir une fonction réciproque. Nous appelons arcsécante (notée arcsec) la fonction réciproque de la sécante sur ce domaine restreint.

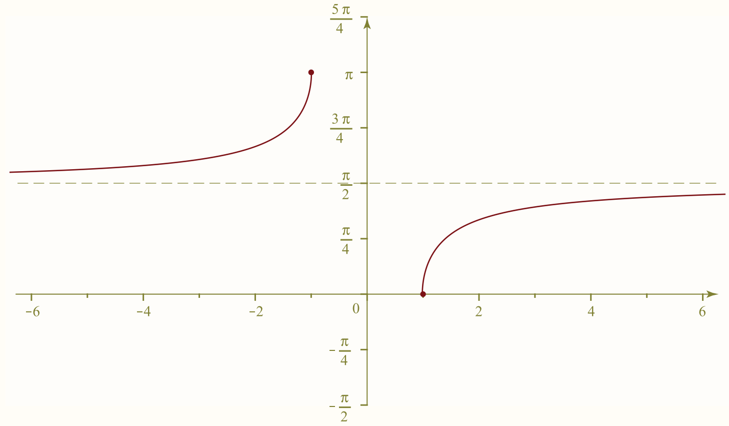

FIG. 2 : *Tracé de* $y = \operatorname{arcsec} x$

- ❏ Le domaine de $y = \operatorname{arcsec} x$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$, soit $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ (Image de sécante)
- ❏ L'image de $y = \operatorname{arcsec} x$ est $[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ (Domaine restreint de sécante)

Montrons que $D_x \sec x = \sec x \tan x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
D_x \sec x &= D_x \left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{identité trigonométrique} \\
&= D_x (\cos x)^{-1} && \text{réécriture en notation exposant} \\
&= -(\cos x)^{-2} (-\sin x) && \text{dérivation en chaîne} \\
&= \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} && \text{simplification} \qquad (1) \\
&= \sec x \tan x && \text{identités trigonométriques}
\end{aligned}
$$

■

L'égalité (1) montre que la dérivée de $\sec x$ existe partout sur son domaine.

Montrons que $D_x \operatorname{arcsec} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, quelque soit $|x| > 1$.

Preuve. On aura noté que la fonction arcsec (FIG 2.) est toujours strictement croissante et donc, que sa dérivée est donc toujours strictement positive. La formule à montrer est heureusement toujours strictement positive quelque soit $|x| > 1$. Rappelons l'identité trigonométrique $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$. Il découle de cette identité que

$$
\begin{aligned}
& \tan^2 \theta \equiv \sec^2 \theta - 1 \\
\iff \quad & \sqrt{\tan^2 \theta} \equiv \sqrt{\sec^2 \theta - 1} \qquad (2) \\
\iff \quad & |\tan \theta| \equiv \sqrt{\sec^2 \theta - 1}
\end{aligned}
$$

Alors, nous avons

$$
\begin{aligned}
y=\operatorname{arcsec} x \quad &\overset{déf}{\iff} \quad x=\sec y \quad \begin{array}{ll} \text{si } 0\le y<\frac{\pi}{2} & (x\ge 1) \text{ ou} \\ \text{si } \frac{\pi}{2}<y\le \pi & (x\le -1) \end{array} \\
&\implies D_x x = D_x \sec y \quad \begin{array}{ll} \text{si } 0< y<\frac{\pi}{2} & (x> 1) \text{ ou} \\ \text{si } \frac{\pi}{2}<y< \pi & (x< -1) \end{array} \\
&\implies 1=\sec y\tan y\, D_x y \quad \text{dérivation en chaîne} \\
&\implies D_x y=\frac{1}{\sec y\tan y} \quad \text{réécriture} \\
&\implies D_x y=\frac{1}{\sec y(\pm\sqrt{\sec^2 y-1})} \quad \text{car } |\tan\theta|=\sqrt{\sec^2\theta-1} \\
&\implies D_x y=\begin{cases} \dfrac{1}{\sec y(+\sqrt{\sec^2 y-1})}, & 0<y<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \tan\theta>0 \\ \dfrac{1}{\sec y(-\sqrt{\sec^2 y-1})}, & \frac{\pi}{2}<y<\pi\Rightarrow \tan\theta<0 \end{cases} \\
&\implies D_x \operatorname{arcsec} x=\begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x>1 \\ \dfrac{1}{-x\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x<-1 \end{cases} \\
&\implies D_x \operatorname{arcsec} x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{si } |x|>1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Autre preuve de $\quad D_x \operatorname{arcsec} x=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, quelque soit $|x|>1$.

Preuve. Sachant que $x=\sec y$ est dérivable et inversible sur $\mathbf{D}=]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$, nous avons alors

$$
\begin{aligned}
y=\operatorname{arcsec} x \quad &\overset{déf}{\iff} \quad x=\sec y \quad \begin{array}{ll} \text{si } 0\le y<\frac{\pi}{2} & (x\ge 1) \text{ ou} \\ \text{si } \frac{\pi}{2}<y\le \pi & (x\le -1) \end{array} \\
&\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}(\sec y)}{\mathrm{d}y} \quad \begin{array}{ll} \text{si } 0< y<\frac{\pi}{2} & (x> 1) \text{ ou} \\ \text{si } \frac{\pi}{2}<y< \pi & (x< -1) \end{array} \\
&\implies \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}=\sec y\tan y \\
&\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sec y\tan y} \\
&\implies \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\left(\frac{1}{\sec y\tan y}\right)^2 \quad \text{Sur } \mathbf{D},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0,\ \sec y \text{ et } \tan y \text{ sont de mêmes signes.} \\
&\implies \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{1}{\sec^2 y\tan^2 y} \\
&\implies \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{1}{\sec^2 y\,(\sec^2 y-1)} \\
&\implies \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{1}{x^2\,(x^2-1)} \\
&\implies \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{x^2\,(x^2-1)}} \\
&\implies \left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|=\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} \\
&\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2-1}} \quad \text{sur } \mathbf{D},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0 \text{ et } x^2-1>0 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Soulignons le fait d'avoir ici deux développements différents pour faire la preuve d'un même énoncé.

Par contre, ce qui est à souligner dans ce qui suit, c'est le fait d'avoir deux développements différents qui nous amène à deux résultats différents mais valables.

Montrons que $$\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x - \ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right| + C_1, & x < -1 \\ x \operatorname{arcsec} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C_2, & x > 1 \end{cases}.$$

Preuve. Intégrons $\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x$ par parties en posant les parties suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arcsec} x & \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}} \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arcsec} x - \int \frac{x \,\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

soit

$$\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x + \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x < -1\,; \\ x \operatorname{arcsec} x - \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Intégrons $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$ par substitution trigonométrique en posant

$$\begin{aligned} x &= \sec\theta \text{ pour } \theta \in \left]0, \pi\right[\setminus \left\{\tfrac{\pi}{2}\right\} \\ \mathrm{d}x &= \sec\theta \tan\theta \,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sec\theta \tan\theta \,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}} \\ &= \int \frac{\sec\theta \tan\theta \,\mathrm{d}\theta}{|\tan\theta|} \qquad \text{car } |\tan\theta| = \sqrt{\sec^2\theta - 1} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sec\theta \cancel{\tan\theta} \,\mathrm{d}\theta}{-\cancel{\tan\theta}} & \text{si } \left]\tfrac{\pi}{2}, \pi\right[\ (x < -1) \\ \displaystyle\int \frac{\sec\theta \cancel{\tan\theta} \,\mathrm{d}\theta}{\cancel{\tan\theta}} & \text{si } \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\ (x > 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int -\sec(\theta \,\mathrm{d}\theta & \text{si } \left]\tfrac{\pi}{2}, \pi\right[\ (x < -1) \\ \displaystyle\int \sec\theta \,\mathrm{d}\theta & \text{si } \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\ (x > 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\ln|\sec\theta + \tan\theta| & \text{si } \left]\tfrac{\pi}{2}, \pi\right[\ (x < -1) \\ \ln|\sec\theta + \tan\theta| & \text{si } \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\ (x > 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\ln|x - \sqrt{x^2-1}| & \text{si } \left]\tfrac{\pi}{2}, \pi\right[\ (x < -1) \\ \ln|x + \sqrt{x^2-1}| & \text{si } \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\ (x > 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Reste à remplacer ce résultat dans l'égalité 3

$$\int \operatorname{arcsec} x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x + \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x < -1\,; \\ x \operatorname{arcsec} x - \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{3}$$

$$= \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x - \ln|x - \sqrt{x^2-1}| + C_1, & x < -1\,; \\ x \operatorname{arcsec} x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C_2, & x > 1. \end{cases}$$

■

Autre résultat pour $\int \operatorname{arcsec} x \, \mathrm{d}x$.

Montrons que $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arcsec} x - \frac{x}{|x|} \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C \quad \text{quelque soit } |x| > 1$

Preuve. Le début de la preuve a un début identique à la preuve précédente lorsqu'on a obtenu les égalités (3) en intégrant par parties :

$$\int \operatorname{arcsec} x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x + \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x < -1\,; \\ x \operatorname{arcsec} x - \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Par contre, dans cette preuve, nous allons obtenir différément $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \mathrm{d}x \\ &= \ln|x+\sqrt{x^2-1}| \end{aligned}$$

La dérivée $D_x(x+\sqrt{x^2-1}) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, l'intégrande précédente est donc de la forme $\dfrac{u\prime}{u}$

Reste à remplacer ce résultat dans l'égalité 3

$$\int \operatorname{arcsec} x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x + \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x < -1\,; \\ x \operatorname{arcsec} x - \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{3}$$

$$= \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C_1, & x < -1\,; \\ x \operatorname{arcsec} x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C_2, & x > 1. \end{cases}$$

Puisque $\dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, nous pouvons réécrire l'égalité précédente comme suit :

$$\int \operatorname{arcsec} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arcsec} x - \frac{x}{|x|} \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C \quad \text{quelque soit } |x| > 1$$

■

Observons maintenant la simplification automatique de Maple pour $\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x$.

```
> Int(arcsec(x),x)=int(arcsec(x),x);
```

$$\int \operatorname{arcsec}(x)\, dx = x \operatorname{arcsec}(x) - \ln\left(x + x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \quad (1)$$

Observons maintenant les simplifications conditionnelles suivantes de $\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x$.

```
> simplify((1)) assuming x<-1;
  simplify((1)) assuming x>1;
```

$$\int \operatorname{arcsec}(x)\, dx = x \operatorname{arcsec}(x) - \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\int \operatorname{arcsec}(x)\, dx = x \operatorname{arcsec}(x) - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (2)$$

Cette simplification sur demande correspond au résultat de la première preuve de $\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{arcsec} x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} x \operatorname{arcsec} x - \ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right| + C_1, & x < -1 \\ x \operatorname{arcsec} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C_2, & x > 1 \end{cases}$$

Dans le résultat Maple (2), on remarque ici deux choses :

- l'omission de la constante d'intégration,
- l'omission des barres verticales pour noter la valeur absolue.

Le choix par les programmeurs d'omettre la constante d'intégration est pour laisser aux utilisateurs la gestion des constantes d'intégration. C'est donc pour un souci d'efficacité dans les calculs. Ce n'est donc pas une erreur. Par contre, dans un développement « manu scriptus », par définition de l'intégration indéfinie, il y a l'obligation de globaliser les constantes d'intégration en une constante globale C dans la réponse finale.

Au cégep, dans le cours « Calcul intégral », le modèle retenu pour $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ est $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{|x|} + C$. Maple a plutôt retenu le modèle $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{x}$. Maple opère la simplification automatique dans $\mathbb{C}$. C'est seulement avec l'apprentissage de l'analyse complexe (au niveau universitaire) qu'il est possible de comprendre les problèmes inhérents au mécanisme de la simplification automatique dans Maple. Pour le logiciel Maple, un nombre réel est traité comme un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle. Même avec l'environnement RealDomain de la sous-bibliothèque « Student[Calculus1] », c'est ce modèle qui est appliqué : c'est pour maintenir la validité de ce modèle dans $\mathbb{C}$. Comme utilisateur de Maple, vous serez confronté aussi à d'autres conséquences de la simplification automatique (dans $\mathbb{C}$) de Maple. Nous y reviendrons sur ce sujet dans un autre document.

Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int D_x(\operatorname{arcsec} x)\,\mathrm{d}x \quad \text{quelque soit } |x| > 1 \\ &= \int \mathrm{d}(\operatorname{arcsec} x) \\ &= \int \big(\mathrm{d}(\operatorname{arcsec} x) + \mathrm{d}(C)\big) \quad \text{quelque soit } C \in \mathbb{R},\ \mathrm{d}(C) = 0 \\ &= \int \mathrm{d}(\operatorname{arcsec} x) + \int \mathrm{d}(C) \quad \text{propriété de linéarité de } \int \end{aligned}$$

$$= \operatorname{arcsec} x + C$$

Obtenons $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ avec Maple afin d'observer le mécanisme de la simplification automatique (dans $\mathbb{C}$).

```
> Int(1/abs(x)/sqrt(x^2-1),x)=int(1/abs(x)/sqrt(x^2-1),x);
```

$$\int \frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) & x<0 \\ \mathit{undefined} & x=0 \\ -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) & 0<x \end{cases} \tag{3}$$

```
> lhs('(3)')=simplify(rhs((3))) assuming x<-1;
  lhs('(3)')=simplify(rhs((3))) assuming x>1;
```

$$\int \frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$
$$\int \frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) \tag{4}$$

Réécrivons la simplification obtenue précédemment en faisant intervenir l'identité suivante :

$$\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x<0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x^2-1}) + C_1' & \text{si } x<-1 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan(\sqrt{x^2-1}) + C_2' & \text{si } x>1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\arctan(\sqrt{x^2-1}) + C_1 & \text{si } x<-1 \\ \arctan(\sqrt{x^2-1}) + C_2 & \text{si } x>1 \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Cette réécriture nous permet de dériver plus efficacement. Dérivons, par rapport à x, le membre de droite de l'équation (**4**).

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{cases} -\arctan(\sqrt{x^2-1}) + C_1 & x<-1 \\ \arctan(\sqrt{x^2-1}) + C_2 & x>1 \end{cases} &= \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\arctan(\sqrt{x^2-1} + C_1) & x<-1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan(\sqrt{x^2-1}) + C_2) & x>1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x<-1 \\ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x>1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x|>1 \end{aligned}$$

La dérivée de la primitive obtenue par la simplification conditionnelle (calculée dans $\mathbb{C}$) correspond effectivement à l'intégrande.

Nous aurions pu obtenir directement la conversion de $\operatorname{arcsec} x$ en $\arctan x$ avec le cercle trigonométrique. En effet,

$$
\begin{aligned}
x = \sec\theta &\overset{déf}{\Longleftrightarrow} \operatorname{arcsec} x = \theta, \quad \forall\, \theta \in [0,\pi] \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\} \\
|\tan\theta| = \sqrt{\sec^2\theta - 1} & \qquad \text{et} \\
\tan\theta = \pm\sqrt{x^2-1}, &\quad \forall\, \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\theta \,|\, \theta = (2k+1)\tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arctan(\sqrt{x^2-1}) \qquad 0 \le \theta < \tfrac{\pi}{2} \;\; (x > 1) \\
\theta &= \pi + \arctan(-\sqrt{x^2-1}) \quad \tfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \;\; (x < -1) \\
&= \pi - \arctan(\sqrt{x^2-1}) \quad \text{arctan étant une fonction impaire}
\end{aligned}
$$

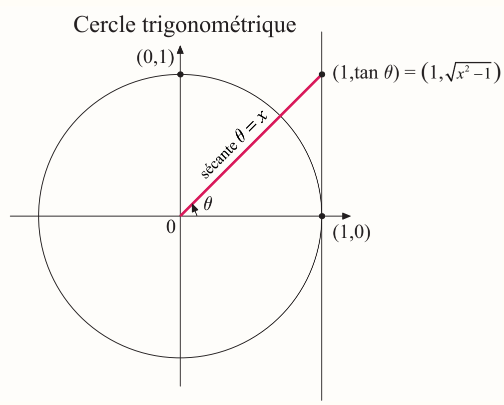

FIG. 3 : *Ligne sécante où* $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

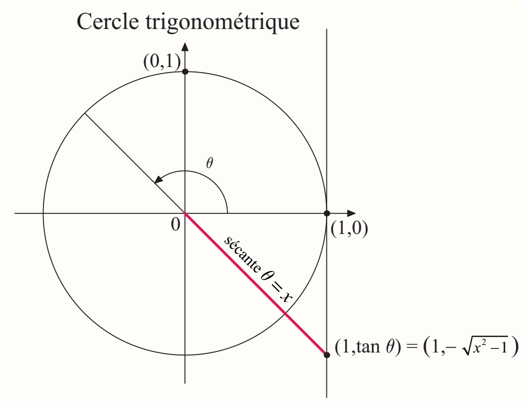

FIG. 4 : *Ligne sécante* $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$