Résolution RP-2

© Pierre Lantagne
Enseignant retraité du Collège de Maisonneuve

* Ce document Maple est exécutable avec la version 2020.2

Initialisation

```
> restart;
> with(LinearAlgebra, BackwardSubstitute,Copy,GaussianElimination,
  GenerateMatrix,
                     IdentityMatrix,LinearSolve,ReducedRowEchelonForm,
                     RowOperation,SubMatrix):
```

No. 1

a) Soit le système S suivant.

```
> S:=[2*x[1]+2*x[2]-2*x[3]=5,
      7*x[1]+7*x[2]+  x[3]=10,
      5*x[1]+5*x[2]-  x[3]=5];
```

$$S := [2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, 7x_1 + 7x_2 + x_3 = 10, 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 5] \quad (2.1)$$

b) Obtenons la matrice augmentée A|B du système S.

```
> Vars:=[seq(x[i],i=1..3)]:
  `[A|b]`:=GenerateMatrix(S,Vars,augmented=true);
```

$$[A|b] := \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

c) Obtenons pas à pas la forme échelon de la matrice A|B.

```
> M1:=RowOperation(`[A|b]`,[2,1],-7/2);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{15}{2} \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

```
> M2:=RowOperation(M1,[3,1],-5/2);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{15}{2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

```
> M3:=RowOperation(M2,[3,2],-1/2);
```

$$M3 := \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5)}$$

d) La dernière ligne de M3 montre clairement que le système à résoudre est une système contradictoire. Pour voir, résolvons tout de même avec une substitution à rebours.

```
> X=BackwardSubstitute(M3);
Error, (in LinearAlgebra:-BackwardSubstitute) inconsistent system
```

On s'y attendait. La matrice échelon précédente nous a confirmé effectivement que le système S est un système contradictoire.

```
> unassign('S','Vars','`[A|b]`','M1','M2','M3','X');
```

No. 2

a) Créons la matrice A.

```
> A:=< <2,1,-3,1>|
       <-1,2,1,2>|
       <1,1,1,3>|
       <0,2,3,1> >;
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1)}$$

```
> `[A|Id]`:=<A|IdentityMatrix(4)>;
```

$$[A|Id] := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2)}$$

```
> A_échelonnée_réduite:=ReducedRowEchelonForm(`[A|Id]`);
```

$$A\_échelonnée\_réduite := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{47} & \frac{13}{47} & -\frac{7}{47} & -\frac{5}{47} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{22}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{9}{47} & \frac{7}{47} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{47} & -\frac{16}{47} & \frac{5}{47} & \frac{17}{47} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{14}{47} & \frac{15}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{13}{47} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.3)}$$

```
> A_inverse:=SubMatrix(A_échelonnée_réduite,1..4,5..8);
```

$$A\_inverse := \begin{bmatrix} \frac{9}{47} & \frac{13}{47} & -\frac{7}{47} & -\frac{5}{47} \\ -\frac{22}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{9}{47} & \frac{7}{47} \\ \frac{7}{47} & -\frac{16}{47} & \frac{5}{47} & \frac{17}{47} \\ \frac{14}{47} & \frac{15}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{13}{47} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

f)
Vérification:

```
> A%.A_inverse = A.A_inverse;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{47} & \frac{13}{47} & -\frac{7}{47} & -\frac{5}{47} \\ -\frac{22}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{9}{47} & \frac{7}{47} \\ \frac{7}{47} & -\frac{16}{47} & \frac{5}{47} & \frac{17}{47} \\ \frac{14}{47} & \frac{15}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{13}{47} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

```
> A_inverse%.A = A_inverse.A;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{47} & \frac{13}{47} & -\frac{7}{47} & -\frac{5}{47} \\ -\frac{22}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{9}{47} & \frac{7}{47} \\ \frac{7}{47} & -\frac{16}{47} & \frac{5}{47} & \frac{17}{47} \\ \frac{14}{47} & \frac{15}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{13}{47} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

```
> unassign('A','`[A|Id]`','A_échelonnée_réduite');
```

No. 3

a) Soit le système S suivant.

```
> S:=[ x + 2*y -   z = a,
   -3*x - 3*y + 9*z = b,
    4*x +10*y       = c];
```

$$S := [x+2y-z=a, -3x-3y+9z=b, 4x+10y=c] \quad (4.1)$$

Générons la matrice augmentée de ce système.

```
> Vars:=[x,y,z]:
```

```
`[A|B]`:=GenerateMatrix(S,Vars,augmented=true);
```

$$[A|B] := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ -3 & -3 & 9 & b \\ 4 & 10 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Obtenons la forme de Gauss de A|B.

```
> `[A|B]_échelon`:=GaussianElimination(`[A|B]`);
```

$$[A|B]\_échelon := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 3 & 6 & b+3a \\ 0 & 0 & 0 & c-6a-\frac{2b}{3} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

b) Les conditions sur *a*, *b* et *c* afin que ce système soit un système compatible est que $c-6a-\frac{2}{3}b=0$.

c) Dans ce cas, obtenons la valeur que devra prendre le paramètre *c* en fixant $a = 1$ et $b = -3$.

```
> a:=1:
  b:=-3:
  solve(`[A|B]_échelon`[3,4]=0,{c});
```

$$\{c=4\} \quad (4.4)$$

Ainsi, avec $a = 1$, $b = -3$ et $c = 4$, le système est un système compatible avec une infinité de solutions.

Maintenant, formulons la matrice échelon du système avec les valeurs de $a = 1$, de $b = -3$ et de $c = 4$.

```
> assign((4.4));
```

```
> `[A|B]_échelon`;
  M:=Copy(`[A|B]_échelon`);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 3 & 6 & b+3a \\ 0 & 0 & 0 & c-6a-\frac{2b}{3} \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

- **Remarque**: La raison de faire une copie de la matrice `` `[A|B]_échelon` `` est que l'objet Matrice ne possède pas la caractéristique last name evaluation de la plupart des objets Maple. C'est de par son mode de stockage d'un objet de type `Matrix` que la matrice `` `[A|B]` `` et donc aussi la matrice résultat `` `[A|B]_échelon` `` qui conservent les informations symbolique *a*, *b*, et *c* même après avoir effectué ultérieurement des assignations numériques à ces paramètres.

```
> op(2,`[A|B]_échelon`);
```

```
op(2,M);
```

$$\left\{(1,1)=1,\ (1,2)=2,\ (1,3)=-1,\ (1,4)=a,\ (2,2)=3,\ (2,3)=6,\ (2,4)=b+3a,\ (3,4)=c-6a-\frac{2b}{3}\right\}$$

$$\{(1,1)=1,\ (1,2)=2,\ (1,3)=-1,\ (1,4)=1,\ (2,2)=3,\ (2,3)=6\} \quad \textbf{(4.6)}$$

Le résultat précédent le montre bien. Au moment de la sauvegarde de la matrice M avec la macro-commande `Copy`, Maple crée cette matrice avec des entrées conforment aux contenus respectifs des paramétres *a*, *b*, et *c*.

Obtenons directement l'ensemble-solution avec la macro-commande `BackwardSubstitute` appliquée sur la matrice `M` et non pas sur la matrice `` `[A|B]_échelon` `` elle-même.

```
> Solution:=BackwardSubstitute(M);
```

$$Solution := \begin{bmatrix} 1+5\_t0_1 \\ -2\_t0_1 \\ \_t0_1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.7)}$$

Renommons la variable système $\_t8_1$ par t.

```
> convert(Vars,Vector)=subs(_t0[1]=t,Solution);
```

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.8)}$$

Réponse: E.-S. = $\{\ \langle x, y, z\rangle^t \mid x=1+5t,\ y=-2t,\ z=t \text{ où } t \in \mathbb{R}\ \}$.

```
> unassign('S','Vars','`[A|B]`','`[A|B]_échelon`','a','b','M','Racine',
  'c','Solution');
```

No. 4

a) Créons la matrice des coefficients du système à résoudre.

```
> A:=< <2|2|1|7>,
       <1|1|2|8>,
       <1|1|0|2> >;
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1)}$$

b) Créons la matrice (vecteur) colonne des constantes.

```
> b:=<-6,0,-4>;
```

$$b := \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

c) Obtenons directement l'ensemble-solution avec la macro-commande `LinearSolve`.

```
> Solution:=LinearSolve(A,b);
```

$$Solution := \begin{bmatrix} -4 - \_t1_2 - 2\,\_t1_4 \\ \_t1_2 \\ 2 - 3\,\_t1_4 \\ \_t1_4 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Remplaçons les variables systèmes $\_t1_2$ et $\_t1_4$ par r et s respectivement. Documentons également la zone des résultats avec la matrice colonne des inconnues.

```
> X:=<x,y,z,w>:
  X=subs(_t1[2]=r,_t1[4]=s,Solution);
```

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - r - 2\,s \\ r \\ 2 - 3\,s \\ s \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Réponse: E.-S. = $\{\ \langle x, y, z, w\rangle^{\,t} \mid x = -4 - r - 2\,s, y = r, z = 2 - 3\,s, w = s$ où $s, t \in \mathbb{R}\ \}$.

```
> unassign('A','b','Solution','X');
```

No. 5

a) Soit le système S suivant

```
> S:=[  x +   y - z +   w = 1,
      a*x +   y + z +   w = b,
      3*x + 2*y +     a*w = 1+a];
```

$$S := [x + y - z + w = 1, a\,x + w + y + z = b, a\,w + 3\,x + 2\,y = 1 + a] \quad (6.1)$$

Générons la matrice augmentée A|B de ce système.

```
> Vars:=[x,y,z,w]:
  `[A|B]`:=GenerateMatrix(S,Vars,augmented=true);
```

$$[A|B] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 0 & a & 1 + a \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Obtenons la forme échelon de Gauss pour alimenter notre réflexion.

```
> `[A|B]_échelon`:=GaussianElimination(`[A|B]`);
```

(6.3)

$$[A|B]\_échelon := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1+a & 1-a & b-a \\ 0 & 0 & \frac{2(-2+a)}{-1+a} & -2+a & \frac{a^2-2a-b+2}{-1+a} \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.3)}$$

Commençons l'analyse de ce système avec $a = 2$.

```
> a:=2;
  Copy(`[A|B]_échelon`);
```

$$a := 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b+2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.4)}$$

Clairement, si $b \neq 2$ lorsque $a = 2$, le système est contradictoire. Donc, si $a = 2$, il est nécessaire que $b = 2$ pour que ce système soit un système compatible (infinité de solutions).

Traitons ensuite le cas où $a \neq 2$.

```
> unassign('a'):
  `[A|B]_échelon`:=GaussianElimination(`[A|B]`);
```

$$[A|B]\_échelon := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1+a & 1-a & b-a \\ 0 & 0 & \frac{2(-2+a)}{-1+a} & -2+a & \frac{a^2-2a-b+2}{-1+a} \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.5)}$$

```
> Solution:=BackwardSubstitute((6.5));
```

$$Solution := \begin{bmatrix} \frac{a\_t2_1 - a + b - 2\_t2_1}{-2+a} \\ -\frac{a^2\_t2_1 - a^2 + a\_t2_1 - 2a + 3b - 6\_t2_1 + 2}{2(-2+a)} \\ -\frac{a^2\_t2_1 - a^2 - 3a\_t2_1 + 2a + b + 2\_t2_1 - 2}{2(-2+a)} \\ \_t2_1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.6)}$$

```
> convert(Vars,Vector)=subs(_t2[1]=s,(6.6));
```

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{as - a + b - 2s}{-2+a} \\ -\frac{a^2 s - a^2 + as - 2a + 3b - 6s + 2}{2(-2+a)} \\ -\frac{a^2 s - a^2 - 3as + 2a + b + 2s - 2}{2(-2+a)} \\ s \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.7)}$$

Clairement, si $a \neq 2$, ce système est un système compatible avec une infinité de solutions et ce, quelque soit la valeur de b (w est ici libre).

En résumé, si $a = 2$, il faut que $b = 2$ aussi afin d'avoir un système compatible (sinon, le système sera contradictoire),
si $a \neq 2$, le système est compatible quelque soit la valeur de b.

b) Obtenons l'ensemble-solution lorsque $a = b = 2$.

```
> a:=2:b:=2:
  M:=Copy(`[A|B]_échelon`);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

```
> Solution:=BackwardSubstitute(M);
```

$$Solution := \begin{bmatrix} 1 - 2\_t3_2 \\ 3\_t3_2 - \_t3_1 \\ \_t3_2 \\ \_t3_1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

```
> convert(Vars,Vector)=subs(_t3[1]=r,_t3[2]=s,(6.9));
```

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2s \\ 3s - r \\ s \\ r \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

Réponse: E.-S. = $\{ < x, y, z, w >^t \mid x = 1 - 2s,\ y = 3s - r,\ z = s,\ w = r \text{ où } s, t \in \mathbb{R} \}$

```
> unassign('S','Vars','`[A|B]`','`[A|B]_échelon`','a','b','Solution'):
```

No. 6

a) $\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_3 & 2 & x_4 \\ x_5 & x_6 & 3 \end{bmatrix}$.

```
> Système:=[ 1+x[1]+x[2]=6,
             x[3]+2+x[4]=6,
             x[5]+x[6]+3=6,
             1+x[3]+x[5]=6,
             x[1]+2+x[6]=6,
             x[2]+x[4]+3=6,
             x[5]+2+x[2]=6];
```

$$Système := [1 + x_1 + x_2 = 6, x_3 + 2 + x_4 = 6, x_5 + x_6 + 3 = 6, 1 + x_3 + x_5 = 6, x_1 + 2 + x_6 = 6, x_2 + x_4 + 3 = 6, x_5 + 2 + x_2 = 6] \quad \textbf{(7.1)}$$

```
> Vars:=[x[1],x[2],x[3],x[4],x[5],x[6]];
  `A|B` := GenerateMatrix(Système, Vars, augmented=true);
```

$$Vars := [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$$

$$A|B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.2)}$$

```
> `A|B_GJ`:=ReducedRowEchelonForm(`A|B`);
```

$$A|B\_GJ := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.3)}$$

```
> Solution:=BackwardSubstitute(`A|B_GJ`);
```

$$Solution := \begin{bmatrix} 4 - \_t4_1 \\ 1 + \_t4_1 \\ 2 + \_t4_1 \\ 2 - \_t4_1 \\ 3 - \_t4_1 \\ \_t4_1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.4)}$$

```
> convert(Vars,Vector)=subs(_t4[1]=s,(7.4));
```

(7.5)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-s \\ 1+s \\ 2+s \\ 2-s \\ 3-s \\ s \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

On trouve donc une infinité de carrés magiques de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 4-s & 1+s \\ 2+s & 2 & 2-s \\ 3-s & s & 3 \end{bmatrix}$. Par exemple, obtenons-en deux en posant $s = 1$ et $s = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & `?` & `?` \\ `?` & 2 & `?` \\ `?` & `?` & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 1 & `?` & `?` \\ `?` & 2 & `?` \\ `?` & `?` & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 3 \\ x_2 & 2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}$.

```
> Système:=[ x[2]+2+x[3]     = 1+x[1]+3,
             x[4]+x[5]+x[6] = 1+x[1]+3,
             1+x[2]+x[4]     = 1+x[1]+3,
             x[1]+2+x[5]     = 1+x[1]+3,
             3+x[3]+x[6]     = 1+x[1]+3,
             1+2+x[6]        = 1+x[1]+3,
             x[4]+2+3        = 1+x[1]+3];
```

$$Système := [x_2 + 2 + x_3 = 4 + x_1, x_4 + x_5 + x_6 = 4 + x_1, 1 + x_2 + x_4 = 4 + x_1, x_1 + 2 + x_5 = 4 + x_1, 3 + x_3 + x_6 = 4 + x_1, 3 + x_6 = 4 + x_1, x_4 + 5 = 4 + x_1] \tag{7.6}$$

```
> `A|B` := GenerateMatrix(Système, Vars, augmented=true);
```

(7.7)

$$A|B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.7)}$$

```
> `A|B_GJ`:=ReducedRowEchelonForm(`A|B`);
```

$$A|B\_GJ := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.8)}$$

```
> Solution:=BackwardSubstitute(`A|B_GJ`);
```

$$Solution := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.9)}$$

```
> convert(Vars,Vector)=(7.9);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.10)}$$

On trouve donc un unique carré magique.

$$\begin{bmatrix} 1 & `?` & 3 \\ `?` & 2 & `?` \\ `?` & `?` & `?` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 3 \\ 2 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}.$

```
> Système:={ 2+x[2]+x[3]     = 1+x[1]+3,
             x[4]+x[5]+x[6] = 1+x[1]+3,
             1+2+x[4]       = 1+x[1]+3,
             x[1]+x[2]+x[5] = 1+x[1]+3,
             3+x[3]+x[6]    = 1+x[1]+3,
             1+x[2]+x[6]    = 1+x[1]+3,
             x[4]+x[2]+3    = 1+x[1]+3};
```

$$Système := \{3 + x_4 = 4 + x_1, 1 + x_2 + x_6 = 4 + x_1, 3 + x_3 + x_6 = 4 + x_1, x_1 + x_2 + x_5 = 4 + x_1, x_2 + 2 + x_3 = 4 + x_1, x_2 + x_4 + 3 = 4 + x_1, x_4 + x_5 + x_6 = 4 + x_1\} \quad \textbf{(7.11)}$$

```
> `A|B` := GenerateMatrix(Système, Vars, augmented=true);
```

$$A|B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.12)}$$

```
> `A|B_GJ`:=ReducedRowEchelonForm(`A|B`);
```

$$A|B\_GJ := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.13)}$$

```
> Solution:=BackwardSubstitute(`A|B_GJ`);
```

$$Solution := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.14)}$$

```
> convert(Vars,Vector)=(7.14);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.15)}$$

On trouve un unique carré magique.

$$\begin{bmatrix} 1 & `?` & 3 \\ 2 & `?` & `?` \\ `?` & `?` & `?` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_3 & 3 & 2 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}$.

```
> Système:={ x[3]+3+2      = 1+x[1]+x[2],
             x[4]+x[5]+x[6]= 1+x[1]+x[2],
             1+x[3]+x[4]   = 1+x[1]+x[2],
             x[1]+3+x[5]   = 1+x[1]+x[2],
             x[2]+2+x[6]   = 1+x[1]+x[2],
             1+3+x[6]      = 1+x[1]+x[2],
             x[4]+3+x[2]   = 1+x[1]+x[2]};
```

$$\mathit{Système} := \{4+x_6 = 1+x_1+x_2, x_3+5 = 1+x_1+x_2, 1+x_3+x_4 = 1+x_1+x_2, x_1+3+x_5 = 1+x_1+x_2, x_2+2+x_6 = 1+x_1+x_2, x_2+x_4+3 = 1+x_1+x_2, x_4+x_5+x_6 = 1+x_1+x_2\} \qquad \textbf{(7.16)}$$

```
> `A|B` := GenerateMatrix(Système, Vars, augmented=true);
```

$$A|B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.17)}$$

```
> `A|B_GJ`:=ReducedRowEchelonForm(`A|B`);
```

$$A|B\_GJ := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

```
> Solution:=BackwardSubstitute(`A|B_GJ`);
```

$$Solution := \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

```
> convert(Vars,Vector)=(7.19);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

On trouve donc un unique carré magique.

$$\begin{bmatrix} 1 & `?` & `?` \\ `?` & 3 & 2 \\ `?` & `?` & `?` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$