

Règles et formules d'intégration

Règles d'intégration

$$1. \int c f(u) du = c \int f(u) du$$

$$2. \int (a f(u) \pm b g(u)) du = a \int f(u) du \pm b \int g(u) du$$

Formules d'intégration

$$1. \int 0 du = C \quad 2. \begin{cases} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \int e^u du = e^u + C, \\ \int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C, \end{cases}$$

$$4. \int \sin(u) du = -\cos(u) + C$$

$$5. \int \cos(u) du = \sin(u) + C$$

$$6. \int \tan(u) du = \ln|\sec(u)| + C$$

$$7. \int \cot(u) du = \ln|\sin(u)| + C$$

$$8. \int \sec(u) du = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + C \\ = \ln|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2})| + C$$

$$9. \int \csc(u) du = \ln|\csc(u) - \cot(u)| + C \\ = \ln|\tan(\frac{u}{2})| + C$$

$$10. \int \sec^2(u) du = \tan(u) + C$$

$$11. \int \csc^2(u) du = -\cot(u) + C$$

$$12. \int \sec(u) \tan(u) du = \sec(u) + C$$

$$13. \int \csc(u) \cot(u) du = -\csc(u) + C$$

$$14. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

$$15. \int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$16. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

De plus, voici quelques techniques d'intégration que vous devriez maîtriser:

- | | |
|-------------------------------|---|
| a) changement de variables | e) substitution trigonométrique |
| b) par parties | f) élimination de racines carrées |
| c) compléter le carré | g) division polynomiale (fraction impropre) |
| d) identités trigonométriques | h) séparation de fractions |

Exercices d'intégration

1. Effectuer:
- | | | |
|--|---|--|
| a) $\int \theta(1 - \theta^2)^{\frac{1}{4}} d\theta$ | g) $\int \frac{\sin^5 \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ | m) $\int \frac{6+v}{3+v} dv$ |
| b) $\int r^2 \left(\frac{r^3}{18} - 1 \right)^5 dr$ | h) $\int \sqrt{v} \sin \left(1 + v^{\frac{3}{2}} \right) dv$ | n) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ |
| c) $\int (x^2 + 1)^2 dx$ | i) $\int \frac{dx}{1 + (3x + 1)^2}$ | o) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ |
| d) $\int \frac{\sin(2t)}{\cos^3(2t)} dt$ | j) $\int \frac{dt}{\sqrt{-t(t+6)}}$ | p) $\int \sqrt{\cot(\psi)} \csc^2(\psi) d\psi$ |
| e) $\int \sec^5(3t) \tan(3t) dt$ | k) $\int s \sqrt{1-s} ds$ | q) $\int \frac{6 \cos \lambda}{(2 + \sin \lambda)^3} d\lambda$ |
| f) $\int \sec^3(t) \tan^3(t) dt$ | l) $\int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du$ | r) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ |

2. Effectuer:
- | | | |
|--|--|--|
| a) $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2 + 1)^{\frac{1}{3}} dt$ | f) $\int_0^{\infty} \frac{e^z}{e^{2z} + 1} dz$ | k) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta$ |
| b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ | g) $\int_1^4 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}(1 + \sqrt{\tau})}$ | l) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(\zeta)} \cos(\zeta) d\zeta$ |
| c) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | h) $\int_1^4 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}(1 + \sqrt{\tau})^2}$ | m) $\int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{(2 - \cos \xi)^2} d\xi$ |
| d) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1 - 4x^2}$ | i) $\int_1^4 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}(1 + \tau)}$ | n) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dt}{t \sqrt{9t^2 - 1}}$ |
| e) $\int_0^3 \sqrt{y+1} dy$ | j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\phi) \sec^2(\phi) d\phi$ | o) $\int_e^{e^e} \frac{dt}{t \ln(t)}$ |

3. Effectuer:
- | | | |
|---|---|--|
| a) $\int \cos(\ln(x)) dx$ | e) $\int \frac{dx}{(9x^2 - 4)^{\frac{5}{2}}}$ | i) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx$ |
| b) $\int x(\operatorname{arcsec}(x))^2 dx$ | f) $\int \frac{xdx}{(x^2 + 2x + 10)^{\frac{3}{2}}}$ | j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4(x) dx$ |
| c) $\int \cot^3(2x) \csc^4(2x) dx$ | g) $\int \frac{(2e^x + 1)e^x}{(e^x - 2)^2} dx$ | k) $\int_{-\frac{1}{5}}^1 \frac{1}{x^2} dx$ |
| d) $\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$ | h) $\int \frac{-2x^2 + 4x - 10}{(x-1)(x^2+3)} dx$ | l) $\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ |

4. Effectuer:

a) $\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx$	e) $\int \frac{2v - 8}{4v^2 - 20v + 31} dv$	i) $\int \sin^6(2\theta) \cos^3(2\theta) d\theta$,
b) $\int \frac{y + 2}{\sqrt{4y - y^2}} dy$	f) $\int \frac{e^r}{e^{2r} - 6e^r + 13} dr$	j) $\int \frac{s^2}{\sqrt{s^2 - b^2}} ds$
c) $\int \frac{1}{z^3 + 5z} dz$	g) $\int \frac{1}{(\rho - 14)\sqrt{\rho + 2}} d\rho$	k) $\int \frac{\arctan(t)}{t^2} dt$
d) $\int \frac{2u^2}{\sqrt{16 - u^2}} du$	h) $\int e^{-2\phi} \cos(4\phi) d\phi$	l) $\int x \arcsin(x^2) dx$

5. Exercices défis:

a) $\int_{-\infty}^{-2a} \frac{x \ln x }{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ (avec $a > 0$)	c) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \frac{t dt}{(a^4 + t^4)^2}$,
b) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(z)}{(c + z)^2} dz$ (avec $c > 0$)	d) $\int_0^{\infty} \frac{t dt}{(a^4 + t^4)^2}$

6. Aires, volumes et longueurs:

- (a) Déterminer l'aire de la région finie limitée par la courbe d'équation $y = 4 - \frac{x^2}{4}$, sa tangente en (2, 3) et l'axe OX .
- (b) Déterminer l'aire de la portion (infinie) de la courbe $y = xe^x$ située sous l'axe OX .
- (c) Calculer le volume du solide engendré par rotation de la région bornée par $y = \frac{x}{x+1}$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$ autour de l'axe OX .
- (d) Calculer le volume du solide engendré par rotation de la région bornée par $y = \ln(x)$, $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$ autour de l'axe OY .
- (e) Calculer le volume du solide engendré par rotation de la région infinie "bornée" par $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$ et $x = 0$ autour de l'axe OX .
- (f) Calculer le volume du solide engendré par rotation de la région bornée par $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ et $x = 0$ autour de l'axe $y = 1$.
- (g) Calculer la longueur de l'arc défini par $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $-1 \leq x \leq 1$.
- (h) Calculer la longueur de l'arc défini par $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ et $1 \leq x \leq 2$.

Réponses

- No. 1
- | | | |
|--|---|--|
| a) $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{\frac{5}{4}} + C$ | g) $\frac{1}{3} \sin^6(\sqrt{x}) + C$ | m) $v + 3 \ln v + C$ |
| b) $\left(\frac{r^3}{18} - 1\right)^6 + C$ | h) $-\frac{2}{3} \cos(1 + v^{\frac{3}{2}}) + C$ | n) $\ln(1 + e^z) + C$ |
| c) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$ | i) $\frac{1}{3} \arctan(3x + 1) + C$ | o) $-\ln(1 + e^{-z}) + C$ |
| d) $\frac{1}{4} \sec^2(2t) + C$ | j) $\arcsin(1 + \frac{t}{3}) + C$ | p) $-\frac{2}{3} \cot^{\frac{3}{2}}(\psi) + C$ |
| e) $\frac{1}{15} \sec^5(3t) + C$ | k) $-\frac{2}{15}(2 + 3s)(1 - s)^{\frac{3}{2}} + C$ | q) $-3(2 + \sin t)^{-2} + C$ |
| f) $\frac{1}{5} \sec^5(t) - \frac{1}{3} \sec^3(t) + C$ | l) $u - 2 \arctan(u) + C$ | r) $\frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$ |
- No. 2
- | | | |
|---------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| a) $\frac{45}{8}$ | f) $\frac{\pi}{4}$ | k) $\frac{7}{24}$ |
| b) 1 | g) $2 \ln(\frac{3}{2})$ | l) $e - e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ |
| c) 2 | h) $\frac{1}{3}$ | m) $\ln(3)$ |
| d) $\frac{\pi}{12}$ | i) $2 \arctan(2) - \frac{\pi}{2}$ | n) $\frac{\pi}{3}$ |
| e) $\frac{14}{3}$ | j) $\frac{1}{2}$ | o) 1 |
- No. 3
- | | |
|---|--|
| a) $\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$ | g) $\ln e^x - 2 - \frac{5}{e^x - 2} + C$ |
| b) $\frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec}^2(x) - \sqrt{x^2 - 1} \operatorname{arcsec}(x) + \ln x + C$ | h) $-2 \ln x - 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$ |
| c) $-\frac{1}{12} \cot^6(2x) - \frac{1}{8} \cot^4(2x) + C$ | i) π |
| d) $2 \sqrt{\sin(x)} - \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}}(x) + C$ | j) $\frac{4}{3}$ |
| e) $\frac{3x^3 - 2x}{8\sqrt{9x^2 - 4}} + C$ | k) ∞ |
| f) $-\frac{x+10}{9\sqrt{x^2+2x+10}} + C$ | l) π |
- No. 4
- | | |
|--|---|
| a) $-\frac{1}{15}(3x^2 + 2a^2)(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ | g) $\frac{1}{2} \ln \sqrt{\rho + 2} - 4 - \frac{1}{4} \ln \rho - 14 + C$ |
| b) $-\sqrt{4y - y^2} + 4 \arcsin(\frac{y}{2} - 1) + C$ | h) $-e^{-2\phi} \frac{\cos(4\phi) - 2 \sin(4\phi)}{10} + C$ |
| c) $-\frac{1}{10} \ln(1 + \frac{5}{x^2}) + C$ | i) $\frac{1}{126} \sin^7(2\theta)(2 + 7 \cos^2(2\theta)) + C$ |
| d) $-u \sqrt{16 - u^2} + 16 \arcsin(\frac{u}{4}) + C$ | j) $\frac{1}{2} s \sqrt{s^2 - b^2} + \frac{b^2}{2} \ln(s + \sqrt{s^2 - b^2}) + C$ |
| e) $\frac{1}{4} \ln(4v^2 - 20v + 31) - \frac{\sqrt{6}}{4} \arctan(\frac{2v-5\sqrt{6}}{6}) + C$ | k) $\ln t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - \frac{\arctan(t)}{t} + C$ |
| f) $\frac{1}{2} \arctan(\frac{e^t}{2} - \frac{3}{2}) + C$ | l) $\frac{1}{2} x^2 \arcsin(x^2) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^4} + C$ |
- No. 5
- | | |
|---------------------------------------|---------------------------|
| a) $-\frac{\pi+2\sqrt{3}\ln(2a)}{6a}$ | c) ∞ (et non 0...) |
| b) $\frac{\ln(1+c)}{c}$ | d) $\frac{\pi}{8a^6}$ |
- No. 6
- | | | | |
|------------------|---------------------------------|----------------------|----------------------|
| a) $\frac{7}{6}$ | c) $\pi(\frac{3}{2} - 2 \ln 2)$ | e) $\frac{\pi^2}{4}$ | g) $e - \frac{1}{e}$ |
| b) 1 | d) $\pi \frac{e^2+1}{2}$ | f) $\frac{\pi}{6}$ | h) $\frac{123}{32}$ |